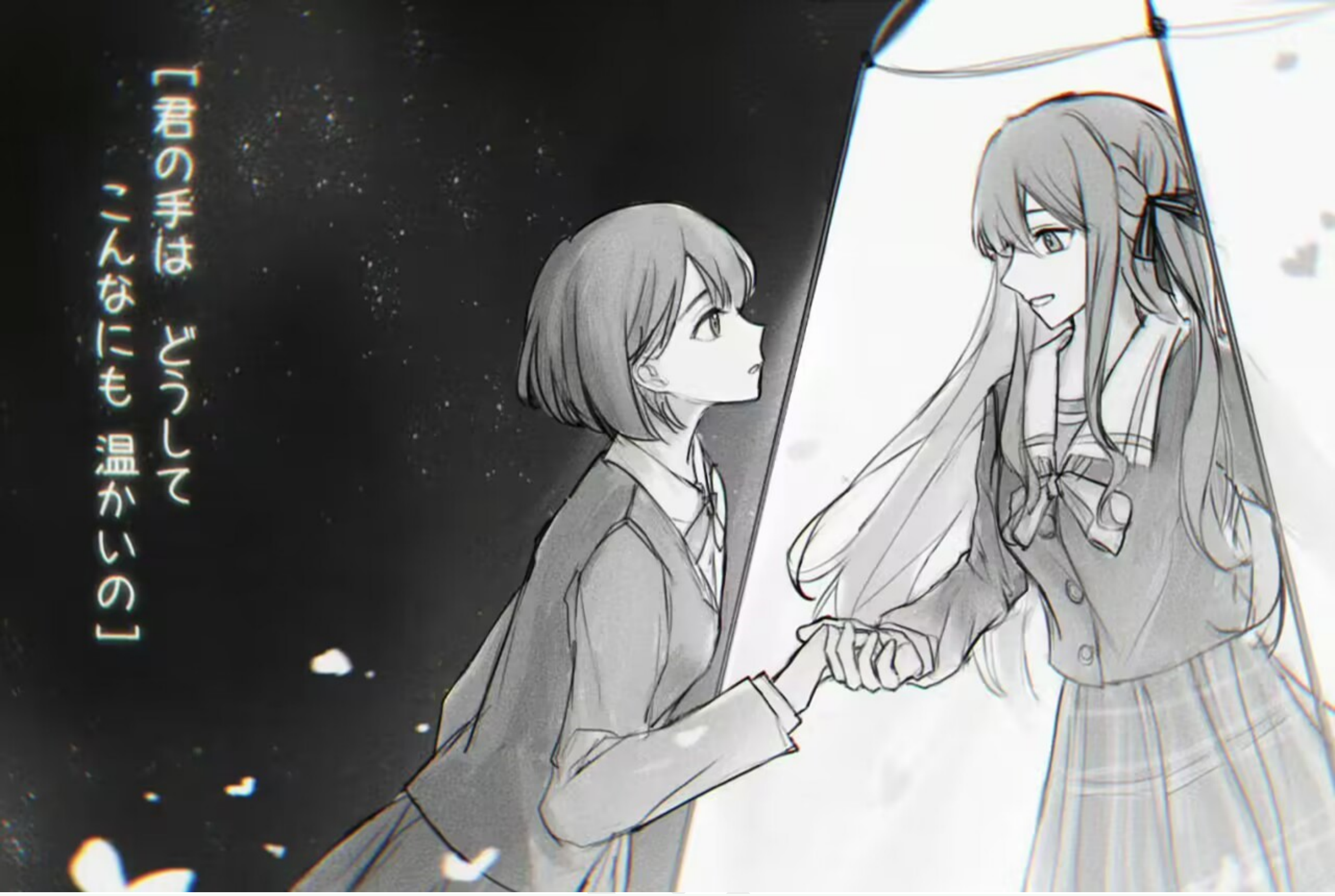



# Functional Analysis

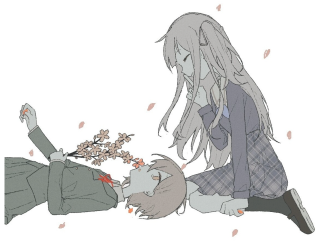
## 课程笔记

作者：Fir1247

组织：USTC

时间：January 2, 2024

联系方式：fa1247@mail.ustc.edn.cn 或者 QQ：3105292483



泛函分析

# 前言

本文档为中国科学技术大学刘聪文老师 2023 年秋季学期泛函分析课程[1] 的笔记，主要基于讲义、课堂板书和助教习题课。涵盖范围大致为课本 3.3 节之前。由于课程内容、顺序、侧重点并不和课本完全一致，所以章节和小节标题是按照我个人喜好划分的，比如我将有界算子的谱相关内容挪到了第三章，因为和第二章其他内容没什么联系。课本上的习题都会标注课本原题号，所有习题答案来自个人解答、网上资料，不能保证完全正确，笔记里也可能会有 typo，还望读者斧正。

泛函分析和实分析是我目前学的最酣畅淋漓的两门数学课，这两门带给我的感受，既不是复分析、微分几何的直观之美（以及与考试计算大赛对比带来的的割裂感），也不是统计课对于实际问题的巧妙求解。套用李小龙的一句话："Don't think, feel." 很多定理、题目的证明，都可以靠一个这样的过程：要从 $A$ 证明 $D$，我先感受条件和结论的联系，从直观上找到可能位于中间的两个 $B$ 和 $C$，猜想这道题的证明方法就是 $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$，然后完善证明细节。例如证明 $(\ell^p)^* = \ell^q$ 时，难点无非就是怎么构造等距同构，回忆证明 $(L^p)^* = L^q$ 的过程，那时构造的等距同构是函数相乘再积分，这和 $L^2$ 上的内积非常像，姑且就叫它"内积"好了。所以猜测 $(\ell^p)^* = \ell^q$ 的等距同构也是通过数列的内积构造的。然后再去完善其它细节。实分析很多也有类似的题目，印象比较深刻的比如关于紧支函数的那一部分，我就把紧支函数想象成一个"小函数"，它在整个实数空间里只占据了有限大的空间，然后用这些"小函数"去逼近全体函数。无论是泛函还是实分析，我都没有刻意去掌握做题技巧之类的东西，而是整理好整门课程的思路和脉络，最终不仅获得还算不错的成绩，也让自己切实感受到有所收获。不过，也有可能是我根本没学明白复分析和微分几何（笑），这些都是我个人观点。我相信讨厌泛函和实分析、喜欢其他课程的同学不在少数，所以上述讨论仅图一乐，请大家务必不要上纲上线。

最后是一些格式上的说明：非文本类型的字母均为斜体，i、e 等特殊量为正体；某些引理的证明会写在引理的框架内部，目的是与定理的证明相区分，单独引理的证明还是会写在框架外面；对于步骤很多的证明，暂时没有找到好用的排版方式，目前大部分采用分段然后标注粗体 Step；$\mathrm{Ran}(A)$、$\mathrm{R}(A)$ 和 $\mathrm{Im}(A)$ 都代表算子 $A$ 的值域，$\mathrm{D}(A)$ 和 $\mathrm{Dom}(A)$ 代表算子 $A$ 的定义域。

最后更新：January 2, 2024



[1]教材：林源渠、张恭庆．泛函分析讲义（上）[M]，第二版，北京大学出版社，2021

# 目录

# 第 1 章 度量空间

## 1.1 压缩映射原理

**定义 1.1.1**

$X$ 是一个非空集合，映射 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 满足：

(1) 唯一性：$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) 非负性：$\forall x, y \in X, d(x, y) \geqslant 0$.

(3) 对称性：$\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$.

(4) 三角不等式：$\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

则称 $d$ 是 $X$ 上的一个距离函数（度量），$(X, d)$ 称为一个度量空间，度量空间里的元素称为“点”。

对于度量空间 $X$，$Y \subset X$，限制在 $Y$ 上的 $d$，记作 $d|_Y$，是 $Y$ 上的度量，$(Y, d|_Y)$ 称为 $(X, d)$ 的子度量空间。

注 实际上 $(2)(3)(4) \Rightarrow (1)$：

$$2d(x, y) = d(x, y) + d(y, x) \geqslant d(x, x) = 0$$

**例 1.1.1.**

$\mathbb{R}^n$ 上定义：$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$，对于 $1 \leqslant p < \infty$，

$$d_p(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p}$$

是距离函数。

$p = \infty$，取 $d_p(x, y) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|$，也是距离函数。

**例 1.1.2.**

数组空间

$$\ell^p(\mathbb{F}) \overset{\text{def}}{=} \{(x_k): x_k \in \mathbb{F}, k=1,2,\cdots, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$$

一般 $\mathbb{F}$ 取 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$，对于 $1 \leqslant p < \infty$，

$$d_p(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p}$$

是距离函数。

$p=\infty$，

$$\ell^\infty(\mathbb{F}) = \{(x_k): \sup_k |x_k| < \infty\}$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

**例 1.1.3.**

离散度量：

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ,x=y \\ 1 & ,x \neq y \end{cases}$$

**例 1.1.4.**

积度量空间：对于度量空间 $(X,d)$，$(Y,\rho)$，

$$X \times Y = \{(x,y): x \in X, y \in Y\}$$

取

$$d_{X\times Y}((a,b),(c,d)) \overset{\text{def}}{=} d(a,c) + \rho(b,d)$$

是距离函数。

约定一些记号：度量空间 $(X,d)$ 上，对于 $x_0 \in X, r > 0$，

$$B(x_0,r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x,x_0) < r\}$$

称为 $x_0$ 的一个 $r$ 邻域（球形邻域）。此外，记

$$\overline{B}(x_0,r) \overset{\text{def}}{=} \overline{B(x_0,r)} = \{x \in X : d(x,x_0) \leqslant r\}$$

$$S(x_0,r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : d(x,x_0) = r\}$$

对于 $A \subset X$，

$$\operatorname{diam}(A) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in A} d(x,y)$$

那么如果 $\operatorname{diam}(A)$ 有限，称 $A$ 有界，等价条件为 $\exists B(x_0,R) \supset A$.

**定义 1.1.2**

度量空间 $(X,d)$ 上，称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，是指存在 $x_0 \in X$ 使得

$$d(x_n,x_0) \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

♣

**推论 1.1.1**

度量空间 $(X,d)$ 上的收敛列的极限唯一，且收敛列有界。

**证明** 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $X$ 上的收敛列，

极限唯一：假设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有两个极限 $a,b$ 且 $a\neq b$，即

$$d(x_n,a)\to 0, d(x_n,b)\to 0$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}d(a,b)>0$，存在 $N$ 使得 $n>N$ 时 $d(x_n,a)<\varepsilon$，于是

$$d(a,b)\leqslant d(x_n,a)+d(x_n,b)$$

$$\Rightarrow d(x_n,b)\geqslant d(a,b)-d(x_n,a)>\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{1}{2}\varepsilon$$

这与 $d(x_n,b)\to 0$ 矛盾。

收敛列有界：设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛到 $x_0$，$\varepsilon>0$，存在 $N$ 使得 $n>N$ 时 $d(x_n,x_0)<\varepsilon$，令

$$R_0=\max_{1\leqslant n\leqslant N} d(x_n,x_0), R=\max\{R_0,\varepsilon\}$$

则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B(x_0,R)$.

**例 1.1.5.**

$C[0,1]$ 为 $[0,1]$ 上连续函数全体，定义度量：

$$d(f,g)\overset{\text{def}}{=}\max_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

于是

$$d(f_n,f)\to 0\Leftrightarrow f_n\rightrightarrows f$$

若定义：

$$\rho_1(f,g)\overset{\text{def}}{=}\int_0^1|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$$

则 $\rho_1$ 也是 $C[0,1]$ 上的一个度量，设

$$f_k(t)=\begin{cases}-k^3(t-\frac{1}{k^2}) & ,t\in[0,\frac{1}{k^2}]\\ 0 & ,t\in[\frac{1}{k^2},1]\end{cases}$$

那么 $\rho_1(f_k,0)=\frac{1}{2}k\cdot\frac{1}{k^2}\to 0 \text{ as } k\to\infty$，但是 $d(f_k,0)=k\nrightarrow 0$.

这个例子说明不同度量下的点列的收敛情况可能不同。

**定义 1.1.3**

度量空间 $(X,d)$，称 $X$ 中的集合 $E$ 是开集是指：$\forall x\in E$，$\exists r>0$ 使得 $B(x,r)\subset E$，即 $\forall x\in E$ 是 $E$ 的内点。

开集的余集称为闭集。[a]

[a] 实际上这是一般拓扑度量空间上闭集的最原始定义，如果该拓扑是由度量诱导的，即所有点都是内点的集合作为开集构成拓扑（见定理 1.1.1），则闭集的定义有其他等价表述（见推论 1.1.2）

**定理 1.1.1**

记 $X$ 上所有的开集为 $\tau$，$\tau$ 满足拓扑的定义：

1. $\varnothing\in\tau$，$X\in\tau$.

2. $\tau$ 对于任意并封闭。
3. $\tau$ 对于有限交封闭。

**定义 1.1.4**

度量空间 $(X,d)$，$E \subset X$ 满足：存在 $x_0 \in X$ 使得

1. $\forall \varepsilon > 0$，$B(x_0,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing$，则 $x_0$ 为 $E$ 的接触点；
2. $\forall \varepsilon > 0$，$B(x_0,\varepsilon) \cap (E \backslash \{x_0\}) \neq \varnothing$，则 $x_0$ 为 $E$ 的聚点。

$E$ 的接触点全体称为 $E$ 的闭包，记作 $\overline{E}$.

**推论 1.1.2**

度量空间 $(X,d)$，$E \subset X$，下列命题等价：

1. $E$ 是闭集；
2. $E = \overline{E}$；
3. $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$，如果 $x_n \to x_0$，则 $x_0 \in E$.

**证明** 证明：(1) $\Rightarrow$ (2)：$E$ 闭 $\Rightarrow E^c$ 开，如果存在 $x_0 \in \overline{E}$ 且 $x_0 \notin E$，则 $x_0 \in E^c$，存在邻域 $B = B(x_0,\varepsilon_0) \subset E^c \Rightarrow B \cap E = \varnothing$，这与 $x_0$ 是接触点矛盾，故 $\overline{E} \subset E$，进而 $\overline{E} = E$.

(2) $\Rightarrow$ (1)：$\overline{E} = E \Rightarrow \forall y \in E^c, y \notin \overline{E} \Rightarrow$ 存在邻域 $B(y,\varepsilon) \cap E = \varnothing \Rightarrow B(y,\varepsilon) \subset E^c \Rightarrow E^c$ 开 $\Rightarrow E$ 闭。

(2) $\Rightarrow$ (3)：任取收敛列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$，$x_n \to x_0$，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N$ 使得 $n > N$ 时 $x_n \in B(x_0,\varepsilon)$，于是 $x_{N+1} \in B(x_0,\varepsilon) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow x_0 \in \overline{E}$.

(3) $\Rightarrow$ (2)：设 $x_0 \in \overline{E}$，取 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $x_1 \in B(x_0,\varepsilon_1) \cap E$；取 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ 使得存在 $x_2 \in B(x_0,\varepsilon_2) \cap E$ 且 $x_2 \neq x_1$；以此类推，并可以要求 $\varepsilon_n \to 0$，否则 $B(x_0, \inf\limits_n\{\varepsilon_n\}) \cap E = \varnothing$，这与 $x_0 \in \overline{E}$ 矛盾。最后得到点列 $\{x_n\}$，且 $x_n \to x_0$，由 (3) 可知 $x_0 \in E$，所以 $\overline{E} \subset E$，进而 $\overline{E} = E$.

**定义 1.1.5**

度量空间 $(X,d)$，$E \subset X$，$x_0 \in E$，如果 $\forall \varepsilon > 0$，$B(x_0,\varepsilon) \backslash \{x_0\} \cap E = \varnothing$，等价于存在点列 $\{x_n\} \subset E$ 使得 $x_n \to x_0$，则称 $x_0$ 是 $E$ 的聚点或者极限点。

记 $E'$ 为 $E$ 的聚点全体，称为 $E$ 的导集。

记 $\overline{E} = E \cup E'$，称为 $E$ 的闭包。如果 $\overline{E} = X$，称 $E$ 在 $X$ 中稠密，记作 $E \overset{\text{dense}}{\subset} X$ 或者 $E \subset\subset X$. 如果 $X$ 有一个可数稠密子集，称 $X$ 可分。

**例 1.1.6.**

$\mathbb{Q} \overset{\text{dense}}{\subset} \mathbb{R}$，多项式全体 $P[a,b] \overset{\text{dense}}{\subset} C[a,b]$.

**例 1.1.7.**

$C[a,b]$ 可分。

**证明** 记 $Q[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上全体有理系数多项式，这是一个可数集；$P[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上全体实系数多项式。设

$$r(x) = r_n x^n + \cdots + r_0 \in P[a,b], \forall r_i \in \mathbb{R}$$

因为 $\mathbb{Q} \overset{\text{dense}}{\subset} \mathbb{R}$，$\forall \varepsilon > 0$，对于每个 $r_i$，存在 $q_i \in \mathbb{Q}$ s.t. $|r_i - q_i| < \varepsilon$，于是令

$$q(x) = q_n x^n + \cdots + q_0 \in Q[a,b]$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow d(r,q) &= \sup_{x\in[a,b]} |(r_n-q_n)x^n+\cdots+(r_0-q_0)| \\
&\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \varepsilon(|x^n|+\cdots+|x|+1) \\
&= C\varepsilon \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0
\end{aligned}
$$

因此 $Q[a,b] \overset{\text{dense}}{\subset} P[a,b]$，而 $P[a,b] \overset{\text{dense}}{\subset} C[a,b]$，$\forall f \in C[a,b]$，设 $d(r,f) < \frac{1}{2}\varepsilon$，$d(q,r) < \frac{1}{2}\varepsilon$，

$$
d(q,f) \leqslant d(r,f) + d(q,r) < \varepsilon
$$

所以 $C[a,b]$ 有可数稠密子集 $Q[a,b]$.

**定义 1.1.6**

$(X,d)$，$(Y,\rho)$ 是两个度量空间，设映射：

$$
T: X \to Y
$$

在 $x_0 \in X$ 处连续是指：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$
d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(T(x),T(x_0)) < \varepsilon
$$

如果 $T$ 在 $X$ 中的每一点都连续，则称 $T$ 是连续映射。♣

**定理 1.1.2**

$(X,d)$，$(Y,\rho)$ 是两个度量空间，映射 $T: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow$ 任取 $Y$ 上的开集 $U$，$T^{-1}(U)$ 是 $X$ 上的开集。♡

**证明** 记 $B_X(x_0,r) = \{x \in X | d(x,x_0) < r\}$，$B_Y(y_0,r) = \{y \in Y | \rho(y,y_0) < r\}$.

$(\Rightarrow)$：$\forall y_0 \in U$，$B_Y(y_0,\varepsilon) \subset U$，设 $x_0 \in T^{-1}(U)$，因为 $T$ 连续，存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in B_X(x_0,\delta) \Rightarrow T(x) \in B_Y(y_0,\varepsilon) \subset U$，所以 $B_X(x_0,\delta) \subset T^{-1}(U)$，由于 $y_0$ 的任意性，$x_0$ 能取遍整个 $T^{-1}(U)$，故 $T^{-1}(U)$ 为开集。

$(\Leftarrow)$：对于 $x_0 \in X$，设 $y_0 = T(x_0)$，$U = B_Y(y_0,\varepsilon)$ 是 $Y$ 上的开集，且 $x_0 \in T^{-1}(U)$，所以存在 $B_X(x_0,\delta) \subset T^{-1}(U)$，则 $x \in B_X(x_0,\delta) \Rightarrow T(x) \in U = B_Y(y_0,\varepsilon)$. 由 $\varepsilon$ 的任意性，$T$ 是连续映射。

**定理 1.1.3 (Heine)**

$T$ 在 $x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ 任取 $X$ 上收敛到 $x_0$ 的点列 $\{x_n\}$，都有 $T(x_n) \to T(x_0)$. ♡

**证明** $(\Rightarrow)$：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $x \in B_X(x_0,\delta) \Rightarrow T(x) \in B_Y(y_0,\varepsilon)$，存在 $N$ 使得 $n > N$ 时 $x_n \in B_X(x_0,\delta) \Rightarrow T(x_n) \in B_Y(T(x_0),\varepsilon) \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0)$.

$(\Leftarrow)$：假设 $T$ 在 $x_0$ 处不连续，即存在 $\varepsilon > 0$，$\forall \delta > 0$，存在 $x \in B_X(x_0,\delta)$ s.t. $T(x) \notin B_Y(y_0,\varepsilon)$，取 $x_n \to x_0$，每个 $T(x_n) \notin B_Y(y_0,\varepsilon)$，则 $T(x_n) \nrightarrow T(x_0)$，矛盾。

**定义 1.1.7**

度量空间 $(X,d)$，称 $\{x_n\}$ 是一个基本列（或者叫 Cauthy 列）是指：$\forall \varepsilon > 0$，存在 $N$ 使得：

$$
d(x_m,x_n) < \varepsilon, \forall m,n \geqslant N
$$

如果 $(X,d)$ 中任意基本列都收敛，则称 $(X,d)$ 完备。完备的度量空间称为 Banach 空间，♣

**例 1.1.8.**

$(\mathbb{R},d)$ 完备，$(\mathbb{Q},d)$ 不完备；$L^p[0,1]$ 完备。

**例 1.1.9.**

例 1.1.5 中的 $(C[0,1],d)$ 完备。

**证明** 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $C[0,1]$ 中任一基本列，于是

$$\forall \varepsilon, \exists N \text{ s.t. } \max_{t\in[0,1]} |f_m(t)-f_n(t)| < \varepsilon, \forall m,n \geqslant N$$

于是对于每个固定的 $t \in [0,1]$，$|f_m(t)-f_n(t)| < \varepsilon$，从而可知 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的基本列，于是存在极限 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$. 在 (1.1.1) 式中令 $m\to\infty$，于是

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in[0,1]} |f_m(t)-f(t)| \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant N \\
\Rightarrow & f_n \rightrightarrows f \\
\Rightarrow & f \in C[0,1], d(f_n,f) \to 0
\end{aligned}$$

**例 1.1.10.**

例 1.1.5 中的 $(C[0,1],\rho_1)$ 不完备。

**证明** 令：

$$f_n(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & ,t\in[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}] \\ nt-\frac{n}{2}+1 & ,t\in[\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}] \\ 1 & ,t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

于是

$$\rho_1(f_n,f_m)=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \to 0 \text{ as } n,m\to\infty$$

因此 $\{f_n\}$ 是基本列。下面证明它不收敛，假设存在 $f\in C[0,1]$ 使得 $\rho_1(f_n,f)\to 0$，

$$\begin{aligned}
\rho_1(f_n,f) &= \int_0^1 |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(t)-f(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1-f(t)|\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 可得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1-f(t)|\mathrm{d}t = 0$$

所以

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ,t\in(0,\frac{1}{2}) \\ 1 & ,t\in(\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

和 $f$ 连续矛盾。

**例 1.1.11.**

离散度量空间完备。

**证明** 任取 $X$ 上的柯西列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在 $N$ 使得 $\forall n,m>N$，$d(x_n,x_m)<\frac{1}{2} \Rightarrow d(x_n,x_m)=0$，即 $\forall n>N, x_n=x_{N+1}$，所以 $x_n\to x_{N+1}\in X$. 故离散度量空间完备。

**定义 1.1.8**

度量空间 $(X,d)$，映射 $T: X \to X$，如果存在 $x^* \in X$ 使得 $T(x^*) = x^*$，则称 $x^*$ 是 $T$ 的一个不动点。

如果存在 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$d(T(x),T(y)) \leqslant \alpha d(x,y), \forall x,y \in X$$

则称 $T$ 是一个压缩映射。

**定理 1.1.4 (Banach 不动点定理、压缩映射原理)**

完备度量空间到自身的压缩映射有唯一的不动点。

**证明** 存在性：这个证明方法叫做 Picard 迭代，任取 $x_0 \in X$，定义迭代序列：

$$x_{n+1} = T(x_n), n = 0,1,\cdots$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(x_{n+1},x_n) &= d(T(x_n),T(x_{n-1})) \\
&\leqslant \alpha d(x_n,x_{n-1}) = \alpha d(T(x_{n-1}),T(x_{n-2})) \\
&\leqslant \alpha^2 d(x_{n-1},x_{n-2}) \\
&\leqslant \cdots \leqslant \alpha^n d(x_1,x_0)
\end{aligned}$$

利用三角不等式，

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(x_{n+p},x_n) &\leqslant \sum_{k=1}^{p} d(x_{n+k},x_{n+k-1}) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{p} \alpha^{n+k-1} d(x_1,x_0) \\
&\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1,x_0) < \varepsilon, n\text{充分大时}, \forall p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{是 } X \text{ 中的基本列} \\
X\text{完备 } &\Rightarrow \exists x^* \in X \text{ s.t. } d(x_n,x^*) \to 0 \text{ as } n \to \infty \\
&\Rightarrow d(T(x^*),x^*) \leqslant d(T(x^*),T(x_n)) + d(T(x_n),x_n) + d(x_n,x^*) \\
&\quad \leqslant \alpha d(x^*,x_n) + d(x_{n+1},x_n) + d(x_n,x^*) \to 0 \text{ as } n \to \infty \\
&\Rightarrow T(x^*) = x^*
\end{aligned}$$

唯一性：设 $y^*$ 是另一个不动点，则

$$d(x^*,y^*) = d(T(x^*),T(y^*)) \leqslant \alpha d(x^*,y^*)$$

因此只能 $d(x^*,y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*$.

**例 1.1.12.**

完备的条件不可去，例如 $X = (0,1)$ 不完备，度量 $d(x,y) = |x-y|$，压缩映射 $T(x) = \frac{1}{2}x$，无不动点。

## 1.2 完备化

**定义 1.2.1**

$(X_1,d_1)$ 和 $(X_2,d_2)$ 是两个度量空间，如果映射 $T:X_1\to X_2$ 保持距离不变，即

$$d_1(x,y)=d_2(T(x),T(y)),\forall x,t\in X_1$$

则称 $T$ 是等距映射。如果存在从 $X_1$ 到 $X_2$ 的既单又满的等距映射，则称 $(X_1,d_1)$ 和 $(X_2,d_2)$ 是等距同构的。

**定义 1.2.2**

如果 $(X_1,d_1)$ 和 $(X_2,d_2)$ 的某个子空间等距同构，则称 $(X_1,d_1)$ 可等距嵌入 $(X_2,d_2)$，记作

$$(X_1,d_1)\hookrightarrow(X_2,d_2)$$

在此意义下，称 $X_1$ 是 $X_2$ 的子空间。

**定义 1.2.3**

对于度量空间 $(X,d)$，如果存在完备的度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$，它的某个稠密子空间 $X_0$ 和 $X$ 等距同构，则称 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是 $(X,d)$ 的一个完备化。

**例 1.2.1.**

1. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化。
2. $L^1[a,b]$ 是 $(C[a,b],\rho_1)$ 的完备化。
3. $C[a,b]$ 是 $(P[a,b],d)$ 的完备化。

**定理 1.2.1**

任何度量空间都有完备化，且完备化在等距同构意义下唯一，即如果 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 和 $(X',d')$ 都是 $(X,d)$ 的完备化，则二者等距同构。

我们的证明思路是：

1. 构造 $(\tilde{X},\tilde{d})$.
2. 构造稠密子空间 $(X_0,\tilde{d})$ 和等距同构。
3. 证明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 完备。
4. 证明等距同构意义下的唯一性。

**证明**

1. $\mathcal{F}$ 定义为 $(X,d)$ 上基本列全体，记 $\xi=\{x_n\}_{n=1}^\infty$，$\eta=\{y_n\}_{n=1}^\infty$，在 $\mathcal{F}$ 上引入等价关系：

$$\xi\sim\eta\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0$$

$\tilde{X}\overset{\text{def}}{=}\mathcal{F}/_\sim$，定义 $\tilde{X}$ 上的度量：

$$\tilde{d}([\xi],[\eta])\overset{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)$$

这里 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $[\xi]$ 中任一代表元，$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $[\eta]$ 中任一代表元，

(a). $\tilde{d}$ 良定：

I. $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ 存在：由三角不等式：

$$\begin{aligned}|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)| =&|d(x_n,y_n)-d(y_n,x_m)+d(x_m,y_n)-d(x_m,y_m)|\\ \leqslant&|d(x_n,y_n)-d(y_n,x_m)|+|d(x_m,y_n)-d(x_m,y_m)|\\ \leqslant& d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)\to 0 \text{ as } n,m\to\infty\end{aligned}$$

所以 $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 中基本列，再由 $\mathbb{R}$ 的完备性可知极限存在。

II. $\tilde{d}([\xi],[\eta])$ 不依赖于 $[\xi],[\eta]$ 的代表元选取：设 $\xi^{(1)}=\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty},\xi^{(2)}=\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}\in[\xi]$，根据定义有 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n^{(1)},x_n^{(2)})=0$，

$$|d(x_n^{(1)},y_n)-d(x_n^{(2)},y_n)|\leqslant d(x_n^{(1)},x_n^{(2)})\to 0 \text{ as } n\to\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n^{(1)},y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x_n^{(2)},y_n)$$

$[\eta]$ 同理。

(b). $\tilde{d}$ 是度量：平凡。

2. 对 $x\in X$，记 $\xi_x\overset{\text{def}}{=\!=}(x,x,\cdots)$，称为常驻点列，当然也是一个基本列。设

$$X_0\overset{\text{def}}{=\!=}\{[\xi_x]:x\in X\}\subset\tilde{X}$$

设 $T:X\to X_0, x\mapsto[\xi_x]$，则 $T$ 是 $X$ 到 $X_0$ 的等距同构。任取 $[\xi]\in\tilde{X}$，任取代表元 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，根据 $\tilde{d}$ 的定义有（常驻点列 $\xi_{x_n}$ 的第 $k$ 项是 $x_n$，点列 $\xi$ 的第 $k$ 项为 $x_k$）

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}([\xi_{x_n}],[\xi])=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} d(x_n,x_k)$$

而 $\xi=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列，所以上式等于 0，即柯西列 $[\xi_{x_n}]\to[\xi]$，可得 $\overline{X_0}=\tilde{X}$.

3. $(\tilde{X},\tilde{d})$ 完备：设 $\{[\xi^{(k)}]\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 中任一基本列，这里 $\xi^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$，由上一步的结论，取常驻点列 $\xi_{x_n^{(k)}}=(x_n^{(k)},\cdots)$，于是对每个 $k$，$[\xi_{x_n^{(k)}}]\to[\xi^{(k)}]$ 取充分大的 $n_k$ 使得：

$$\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])<\frac{1}{k}$$

可得

$$\begin{aligned}\tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])&\leqslant\tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi^{(k)}])+\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi^{(j)}])+\tilde{d}([\xi^{(j)}],[\xi_{x_{n_j}^{(j)}}])\\&<\frac{1}{k}+\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi^{(j)}])+\frac{1}{j}\to 0 \text{ as } j,k\to\infty\end{aligned}$$

令 $\xi'\overset{\text{def}}{=\!=}\{x_{n_k}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{F}$，于是 $[\xi']\in\tilde{X}$，根据 $\tilde{d}$ 的定义有（常驻点列 $\xi_{x_{n_k}^{(k)}}$ 的第 $j$ 项是 $\xi_{x_{n_k}^{(k)}}$，点列 $\xi'$ 的第 $j$ 项为 $x_{n_j}^{(j)}$）

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{d}([\xi_{x_{n_k}^{(k)}}],[\xi'])=\lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} d(x_{n_k}^{(k)},x_{n_j}^{(j)})=0$$

最后

$$\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi'])\leqslant\underbrace{\tilde{d}([\xi^{(k)}],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])}_{<\frac{1}{k}\to 0}+\underbrace{\tilde{d}([\xi'],[\xi_{x_{n_k}^{(k)}}])}_{\to 0}$$

所以 $[\xi^{(k)}]\to[\xi']$，完备性得证。

4. 唯一性：设 $(X',d')$ 也是 $(X,d)$ 的完备化，即 $(X,d)$ 等距同构于 $(X',d')$ 的一个稠密子空间 $(X_0',d')$，设 $T':X\to X_0'$ 是等距同构，则 $\varphi=T'\circ T^{-1}$ 是 $(X_0,\tilde{d})$ 到 $(X_0',d')$ 的等距同构，下面把 $\varphi$ 延拓为 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 到 $(X',d')$ 的等距同构。

$$\forall[\xi]\in\tilde{X},\exists[\xi^n]\in X_0, n=1,2,\cdots \text{ s.t. } \tilde{d}([\xi^n],[\xi])\to 0(\text{由稠密性})$$

因为 $\varphi$ 是等距映射，所以 $\varphi([\xi^{(n)}])$ 是 $(X',d')$ 中的基本列。$X'$ 完备，所以存在 $y\in X'$ 使得 $d'(\varphi[\xi^{(n)}],y)\to 0$，定义映射：$\Phi:\tilde{X}\to X',[\xi]\mapsto y$，接下来验证 $\Phi$ 是等距同构（作业）：

任取 $[\xi^{(1)}],[\xi^{(2)}]\in\tilde{X}$，设 $\Phi([\xi^{(1)}])=y_1,\Phi([\xi^{(2)}])=y_2$，

$$\begin{aligned}&d'(T'(x_n^{(1)}),T'(x_n^{(2)}))-d'(y_1,y_2)\\ \leqslant\ &(d'(T'(x_n^{(1)}),y_2)+d'(y_2,T'(x_n^{(2)})))-(d(T'(x_n^{(1)}),y_2)-d'(T'(x_n^{(1)}),y_1))\\ \leqslant\ &d'(T'(x_n^{(1)}),y_1)+d'(T'(x_n^{(2)}),y_2)\to 0\end{aligned}$$

而 $d'(T'(x_n^{(1)}),T'(x_n^{(2)}))=\tilde{d}([\xi_{x_n^{(1)}}],[\xi_{x_n^{(2)}}])$，同理

$$\tilde{d}([\xi_{x_n^{(1)}}],[\xi_{x_n^{(2)}}])-\tilde{d}([\xi^{(1)}],[\xi^{(2)}])\leqslant\tilde{d}([\xi_{x_n^{(1)}}],[\xi^{(1)}])+\tilde{d}([\xi_{x_n^{(2)}}],[\xi^{(2)}])\to 0$$

因此

$$\tilde{d}([\xi^{(1)}],[\xi^{(2)}])=\lim_{n\to\infty}\tilde{d}([\xi_{x_n^{(1)}}],[\xi_{x_n^{(2)}}])=\lim_{n\to\infty}d'(T'(x_n^{(1)}),T'(x_n^{(2)}))=d'(y_1,y_2)$$

这就证明了 $\Phi$ 是等距同构。

## 1.3 紧性推理

**定义 1.3.1**

度量空间 $(X,d)$，$A\subset X$，

1. 如果一族开集 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得
$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha\supset A$$
则称 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $A$ 的一个开覆盖。
2. 如果 $A$ 的任一开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 都有有限子覆盖，即存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N\in\Lambda$ 使得
$$\bigcup_{k=1}^{N}G_{\alpha_k}\supset A$$
则称 $A$ 紧。
3. 如果 $A$ 中任一点列都有在 $X$ 中收敛的子列，则称 $A$ 列紧。
4. 如果 $A$ 中任一点列都有在 $A$ 中收敛的子列，则称 $A$ 自列紧。
5. 如果空间 $X$ 自身列紧，则称 $X$ 为列紧空间。

♣

**推论 1.3.1**

度量空间上，自列紧集等价于列紧闭集。

♡

**例 1.3.1.**

$\mathbb{R}^n$ 中，列紧集等价于有界集，自列紧集等价于有界闭集等价于紧集。

**例 1.3.2.**

一般度量空间中，有界集不一定列紧，如无穷维线性空间和欧式度量构成的度量空间，设 $e_n$ 为第 $n$ 个分量为 1，其余为 0 的向量，无穷点列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的，但是 $d(e_n,e_m)=\sqrt{2},\forall n\neq m$，无收敛子列。

**命题 1.3.1**

列紧空间中任一集合都列紧，任一闭集都自列紧。

♠

**命题 1.3.2**

列紧空间一定完备。

♠

**证明** 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $(X,d)$ 中基本列，$(X,d)$ 列紧 $\Rightarrow$ 有子列 $x_{n_k} \to x_0 \in X$，

$$\Rightarrow d(x_n,x_0) \leqslant d(x_n,x_{n_k}) + d(x_{n_k},x_0) \to 0 \text{ as } n,k \to \infty$$

**定义 1.3.2**

度量空间 $(X,d)$，$A \subset X$，$\varepsilon > 0$，

1. 称 $N_\varepsilon \subset A$ 是 $A$ 的一个 $\varepsilon$ 网是指
$$\forall x \in A, \exists y \in N_\varepsilon \text{ s.t. } d(x,y) < \varepsilon$$
等价于
$$A \subset \bigcup_{y \in N_\varepsilon} B(y,\varepsilon)$$
即由半径为 $\varepsilon$ 的开球组成的 $A$ 的开覆盖。
2. 如果 $\forall \varepsilon > 0$，都有 $A$ 的一个元素有限的 $\varepsilon$ 网，则称 $A$ 完全有界。即可以选取有限个半径为 $\varepsilon$ 的开球作为 $A$ 的开覆盖。

♣

**命题 1.3.3**

完全有界 $\Rightarrow$ 有界

♠

**证明** 有 $A$ 的有限 1 网 $N_1 := \{y_1,\cdots,y_m\}$，于是令 $R = \sum_{k=2}^{m} d(y_k,y_1) + 1$，则

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k,1) \subset B(y_1,R)$$

**例 1.3.3.**

有界并不一定完全有界，考虑例 1.3.2，$A = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有有限的 $\frac{1}{2}$ 网，因为每个 $\frac{1}{2}$ 球只能覆盖球心。

**定理 1.3.1 (Hausdorff)**

1. 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界
2. 完备度量空间中，列紧 $\Leftrightarrow$ 完全有界。

♡

**证明**

1. 假设 $A$ 列紧不完全有界，即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得有限个半径为 $\varepsilon_0$ 的球不能覆盖 $A$，按照以下方式选取出一列点：
$$x_1 \in A$$
$$x_2 \in A \backslash B(x_1,\varepsilon_0)$$
$$x_3 \in A \backslash \bigcup_{k=1}^{2} B(x_k,\varepsilon_0)$$
$$\vdots$$
$$x_n \in A \backslash \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\varepsilon_0)$$
$$\vdots$$
那么序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ 使得
$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i,\varepsilon_0)$$

因此 $d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0,\forall n\neq m$，说明 $A$ 并不列紧，矛盾。

2. 只需证明：$X$ 完备并且 $A$ 完全有界 $\Rightarrow A$ 列紧。设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，对于 $\varepsilon=1$，有 $A$ 的有限 1 网 $N_1=\{y_1^{(1)},\cdots,y_{m_1}^{(1)}\}$，于是

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\subset\bigcup_{k=1}^{m_1}B(y_k^{(1)},1)$$

因此，存在某个 $k$ 使得 $B(y_k^{(1)},1)$ 包含 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中的无穷多项，记作 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$，并记 $y_k^{(1)}=y^{(1)}$. 同理，$\exists y^{(2)}\in N_{\frac{1}{2}}$ 使得有 $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}\subset B(y^{(2)},\frac{1}{2})$，以此类推：

$$\begin{array}{llllll} x_1^{(1)} & ,x_2^{(1)} & ,x_3^{(1)} & ,\cdots & \in B(y^{(1)},1)\\ x_1^{(2)} & ,x_2^{(2)} & ,x_3^{(2)} & ,\cdots & \in B(y^{(2)},\frac{1}{2})\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ x_1^{(n)} & ,x_2^{(n)} & ,x_3^{(n)} & ,\cdots & \in B(y^{(n)},\frac{1}{n})\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

而且

$$\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}\supset\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}\supset\cdots\supset\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}\supset\cdots$$

取对角线子列：

$$x_n^{(n)}\in\bigcap_{k=1}^{n}B(y^{(k)},\frac{1}{k}),n=1,2,\cdots$$

所以 $\forall n,p$，由于 $x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)}\in B(y^{(n)},\frac{1}{n})$，因此

$$d(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leqslant\frac{2}{n}\to 0$$

所以 $\{x_n^{(n)}\}$ 是基本列，由 $X$ 完备可知 $\{x_n^{(n)}\}$ 收敛，这就是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的收敛子列，于是 $A$ 列紧。

**定理 1.3.2**

度量空间中，紧 $\Leftrightarrow$ 自列紧。

**证明** 必要性：

1. 紧集是闭集。设 $A$ 是紧集，希望证明 $X\backslash A$ 是开集，任取 $x\in X\backslash A$，取开覆盖

$$\bigcup_{y\in A}B(y,\frac{1}{3}d(x,y))\supset A$$

存在子覆盖

$$\bigcup_{k=1}^{m}B(y_k,\frac{1}{3}d(x,y_k))\supset A$$

令 $\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\frac{1}{3}d(x,y_k)$，

$$\Rightarrow B(x,\delta)\cap\bigcup_{k=1}^{m}B(y_k,\frac{1}{3}d(x,y_k))=\varnothing$$

$$\Rightarrow B(x,\delta)\subset X\backslash A$$

所以 $x$ 是内点，进而 $X\backslash A$ 是开集。

2. 紧集是列紧集。假设 $A$ 紧而不列紧，则存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$ 没有收敛子列，不妨假设 $x_n$ 互不相同，令

$$S_n=\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\backslash x_n$$

则 $S_n$ 是闭集[1]，$X\backslash S_n$ 是开集。而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\backslash S_n)=X\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n\right)=X\supset A$$

这就是 $A$ 的一个开覆盖，存在 $N$ 使得

$$\bigcup_{n=1}^{N}(X\backslash S_n)\supset A$$

但是

$$\bigcup_{n=1}^{N}(X\backslash S_n)=X\backslash\left(\bigcap_{n=1}^{N}S_n\right)=X\backslash\{x_n\}_{n=N+1}^{\infty}$$

不能是 $A$ 的覆盖，矛盾。

充分性：假设 $A$ 自列紧但不紧，即存在 $A$ 的一个开覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得任取有限个 $G_\alpha$ 都不能覆盖 $A$，$A$ 自列紧，所以完全有界，对于 $\forall n$，取有限 $\frac{1}{n}$ 网：

$$N_{\frac{1}{n}}=\{y_1^{(n)},\cdots,y_{m_n}^{(n)}\},\ A\subset\bigcup_{k=1}^{m_n}B(y_k,\frac{1}{n})$$

那么，对于每个 $n$，存在 $y_k^{(n)}\in N_{\frac{1}{n}}$ 使得 $B(y_k^{(n)},\frac{1}{n})$ 不能被有限个 $G_\alpha$ 覆盖[2]，记 $y_k^{(n)}=y^{(n)}$，得到点列 $\{y^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，因为 $A$ 自列紧，所以有收敛子列 $\{y^{(n_k)}\}_{k=1}^{\infty}$，并设其收敛到 $y_0\in A$.

设 $y_0\in G_{\alpha_0}$，则存在 $\delta>0$ 使得 $B(y_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$，而 $y^{(n_k)}\to y_0$，当 $k$ 充分大时，$n_k>\frac{2}{\delta}$ 且 $d(y^{(n_k)},y_0)<\frac{\delta}{2}$，则 $\forall y\in B(y^{(n_k)},\frac{1}{n_k})$，

$$d(y,y_0)\leqslant d(y_0,y^{(n_k)})+d(y,y^{(n_k)})\leqslant\frac{2}{\delta}+\frac{1}{n_k}\leqslant\delta$$

于是

$$B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(y_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$$

和 $B(y_{n_k},\frac{1}{n_k})$ 不能被有限个 $G_\alpha$ 覆盖矛盾。

**小结 1.**

$$\text{有界闭}\underset{X=\mathbb{R}^n}{\Leftrightarrow}\text{紧}\Leftrightarrow\text{自列紧}\overset{\text{闭}}{\leftrightarrows}\text{列紧}\overset{X\text{完备}}{\leftrightarrows}\text{完全有界}\overset{X=\mathbb{R}^n}{\leftrightarrows}\text{有界}$$

**定理 1.3.3**

列紧空间可分。

**证明** 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow\forall n$，存在有限的 $\frac{1}{n}$ 网 $N_{\frac{1}{n}}$，然后对所有的 $n$ 取并得到一个可数集：

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}N_{\frac{1}{n}}\overset{\text{dense}}{\subset}X$$

这是因为 $\forall x\in X$，$\forall n$，存在 $x_n\in N_{\frac{1}{n}}$ 使得 $d(x_n,x)<\frac{1}{n}$，从而 $x_n\to x$.

**命题 1.3.4**

$(M,\rho)$ 是紧度量空间，$C(M)$ 为 $M$ 上的连续函数全体，定义

$$d(f,g)\overset{\text{def}}{=}\sup_{x\in M}|f(x)-g(x)|$$

则 $d$ 是 $C(M)$ 上的度量，且 $(C(M),d)$ 完备。(作业)

[1] $S_n$ 没有聚点，也符合闭集定义。

[2] 否则，每个 $B(y_k^{(n)},\frac{1}{n})$ 都能被有限覆盖，取这些有限覆盖的并就是 $A$ 的有限覆盖，矛盾。

**证明** 先证明 $d$ 是 $C(M)$ 上的度量：

(1) 唯一性：$d(f,g)=\sup\limits_{x\in M}|f(x)-g(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ on $M$.

(2) 非负性：绝对值非负，故 $d(f,g)$ 非负。

(3) 对称性：$|f-g|=|g-f|$.

(4) 三角不等式：

$$\begin{aligned}d(f,g)+d(g,h)&=\sup_{x\in M}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in M}|g(x)-h(x)|\\&\geqslant\sup_{x\in M}(|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|)\\&\geqslant\sup_{x\in M}|f(x)-h(x)|=d(f,h)\end{aligned}$$

再证明 $(C(M),d)$ 完备：任取 $C(M)$ 上的柯西列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N \text{ s.t. } \forall m,n\geqslant N, d(f_n,f_m)=\sup_{x\in M}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

则固定 $x\in M$，$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的柯西列，进而收敛，设其收敛到 $f_0(x)$，于是

$$\forall x\in M,\forall\varepsilon>0,\exists N>0 \text{ s.t. } n\geqslant N\Rightarrow\sup_{x\in M}|f_n(x)-f_0(x)|<\varepsilon \tag{1}$$

$f_n$ 连续，所以对于 $\varepsilon$，

$$\exists\delta \text{ s.t. } \forall y\in B(x,\delta),|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon \tag{2}$$

则

$$\begin{aligned}|f_0(x)-f_0(y)|&\leqslant\underset{(1)}{|f_0(x)-f_n(x)|}+\underset{(2)}{|f_n(x)-f_n(y)|}+\underset{(1)}{|f_n(y)-f_0(x)|}\\&\leqslant\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon\to0\end{aligned}$$

所以 $f_0$ 连续，即 $f_0\in C(M)$，于是 $(C(M),d)$ 完备。

**定义 1.3.3**

$(M,\rho)$ 是紧度量空间，$C(M)$ 为 $M$ 上的连续函数全体，称 $C(M)$ 中的一族函数 $\mathcal{F}$ 等度连续是指：$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon,\forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta,\forall\varphi\in\mathcal{F}$$

**定理 1.3.4 (Argela-Ascoli)**

$\mathcal{F}$ 列紧当且仅当 $\mathcal{F}$ 作为函数族一致有界、等度连续。

**证明** 必要性：$\mathcal{F}$ 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ 有界，

$$d(f,0)\leqslant R,\forall f\in\mathcal{F}\Rightarrow\sup_{x\in M}|f(x)|\leqslant R,\forall f\in\mathcal{F}$$

$\Rightarrow$ 一致有界。下证等度连续：$\forall\varepsilon>0$，存在 $N_{\frac{\varepsilon}{3}}=\{\varphi_1,\cdots,\varphi m\}$ 使得

$$\bigcup_{k=1}^{m}B(\varphi_k,\frac{\varepsilon}{3})\supset\mathcal{F} \tag{1}$$

因为 $\varphi_k$ 一致连续，对每个 $k$，存在 $\delta_k>0$ 使得

$$|\varphi_k(x')-\varphi_k(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta_k$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$，则

$$|\varphi_k(x')-\varphi_k(x'')|<\frac{\varepsilon}{3},\forall x',x''\in M \text{ with } \rho(x',x'')<\delta,\forall k \tag{2}$$

由 (1)，

$$\forall\varphi\in\mathcal{F},\exists k \text{ s.t. } d(\varphi,\varphi_k)<\frac{\varepsilon}{3}$$

于是 $\forall x, |\varphi(x)-\varphi_k(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in M} |\varphi(x)-\varphi_k(x)| = d(\varphi,\varphi_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. 而当 $\rho(x',x'') < \delta$ 时，由 (2)，$|\varphi_k(x')-\varphi_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$，所以

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')| \leqslant |\varphi(x')-\varphi_k(x')| + |\varphi_k(x')-\varphi_k(x'')| + |\varphi_k(x'')-\varphi(x'')| < \varepsilon$$

充分性：$\mathcal{F}$ 等度连续，$\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')| < \varepsilon, \forall x',x'' \in M \text{ with } \rho(x',x'') < \delta, \forall\varphi\in\mathcal{F}$$

$M$ 紧，所以有有限 $\delta$ 网 $N_\delta = \{x_1,\cdots,x_n\}$，定义映射：

$$T:\mathcal{F}\to\mathbb{R}^n, \varphi\mapsto(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))$$

$\mathcal{F}$ 一致有界，所以可令

$$R \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in\mathcal{F}}\sup_{x\in M}|\varphi(x)| < \infty$$

则

$$\left[\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{n}R, \forall\varphi\in\mathcal{F}$$

所以 $T(\mathcal{F})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界集，故列紧，设 $T(\mathcal{F})$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}$ 网为

$$M_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{T(\varphi_1),\cdots,T(\varphi_m)\}$$

Claim:$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 $\varepsilon$ 网。

$$\forall\varphi\in\mathcal{F}, \exists k \text{ s.t. } d_{\mathbb{R}^n}(T(\varphi),T(\varphi_m)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

于是 $|\varphi(x_i)-\varphi_k(x_i)| \leqslant d_{\mathbb{R}^n}(T(\varphi),T(\varphi_m)) < \frac{\varepsilon}{3}$. 同时，$\forall x\in M, \exists x_i\in N_\delta$ s.t. $\rho(x_i,x)<\delta$，由 (1.3.3)，

$$|\varphi(x)-\varphi(x_i)|, |\varphi_k(x_i)-\varphi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

所以

$$|\varphi(x)-\varphi_k(x)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x_i)| + |\varphi(x_i)-\varphi_k(x_i)| + |\varphi_k(x_i)-\varphi_k(x)| < \varepsilon$$

所以 $d(\varphi,\varphi_k)\leqslant\varepsilon$.

$L^p$ 空间中列紧集是怎样的？

**定理 1.3.5 (Riesz-Frechet-kolmogorov)**

设 $1\leqslant p<\infty$，$\mathcal{F}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 列紧当且仅当：

1. $\mathcal{F}$ 有界，即 $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} ||f||_p < \infty$.
2. $\forall\varepsilon>0$，$\exists R>0$ s.t.
$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p, \forall f\in\mathcal{F}$$
3. $\forall\varepsilon$，$\exists\delta>0$ s.t.
$$||\tau_h f - f||_p < \varepsilon, \forall h\in\mathbb{R}^n \text{ with } |h|<\delta, \forall f\in\mathcal{F}$$

其中 $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$.

**例 1.3.4.**

$A$ 是 $\ell^2$ 上的列紧集 $\Leftrightarrow$

1. $A$ 有界。
2. $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$ 使得
$$\sum_{k=N+1}^\infty |x_k|^2 < \varepsilon, \forall x = (x_1,x_2,\cdots)\in A$$

（作业）

**证明** (⇒)：假设 $A$ 无界，则能取发散点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $d(a_n,0)\to\infty$，与 $A$ 列紧矛盾；$A$ 列紧则完全有界，$\forall\varepsilon>0$，取 $A$ 的有限 $\varepsilon/2$ 网 $\{a^{(i)}\}_{i=1}^{n}$，其中每个 $a^{(i)}=(a_1^{(i)},\cdots,a_j^{(i)},\cdots)$，根据定义有：

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j^{(i)}|^2<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n$$

所以

$$\exists N_i \text{ s.t. } \sum_{j=N_i+1}^{\infty}|a_j^{(i)}|^2<\varepsilon/2,\ i=1,2,\cdots,n$$

取 $N=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}N_i$，因为 $\{a^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ 是 $\varepsilon$ 网，

$$\forall x\in A,\exists a^{(i)} \text{ s.t. } d(x,a^{(i)})=\sum_{j=1}^{\infty}|a_j^{i}-x_i|^2<\varepsilon/2$$

所以

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}|x_i|^2\leqslant\sum_{i=N+1}^{\infty}(|a_i^{(k)}|^2+|x_i-a_i^{(k)}|^2)\leqslant\varepsilon$$

(⇐)：$\forall\varepsilon>0$，存在 $N$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}|x_i|^2\leqslant\varepsilon,\forall x\in A$$

取连续映射 $\varphi:A\to\mathbb{R}^N,x\mapsto(x_1,\cdots,x_N)$，$A$ 有界 $\Rightarrow\varphi(A)$ 有界 $\Rightarrow\varphi(A)$ 完全有界，对于 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{2}$，存在 $\varphi(A)$ 上的有限 $\delta$ 网 $\{\varphi(x^{(i)})\}_{i=1}^{n}$，记 $X=\{x^{(i)}\}_{i=1}^{n}\subset A$.

$$\forall y\in A,\exists x^{(i)}\in X \text{ s.t. } d_{\mathbb{R}^N}(\varphi(y),\varphi(x^{(i)}))<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow d(y,x^{(i)})^2&=\sum_{j=1}^{N}|y_j-x_j^{(i)}|^2+\sum_{j=N+1}^{\infty}|y_j-x_j^{(i)}|^2\\&<d_{\mathbb{R}^N}(\varphi(y),\varphi(x^{(k)}))+2\sum_{j=N+1}^{\infty}(|y_j|^2+|x_j^{(i)}|^2)<\varepsilon^2\end{aligned}$$

于是 $X$ 为 $A$ 的有限 $\varepsilon$ 网，$A$ 完全有界 $\Rightarrow A$ 列紧。

# 1.4 赋范线性空间

## 1.4.1 Banach 空间

**定义 1.4.1**

$X$ 是非空集合，$\mathbb{K}$ 表示 $\mathbb{C}$ 或者 $\mathbb{R}$，如果能在 $X$ 上定义两种封闭的运算：

1. 加法：$X\times X\to X,(x,y)\mapsto x+y$. 满足：
   (i) 结合律
   (ii) 交换律
   (iii) 零元
   (iv) 负元
2. 乘法：$\mathbb{K}\times X\to X,(\lambda,x)\mapsto\lambda x$. 满足：

(v) $1x = x$.

(vi) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(vii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$.

(viii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

则称 $X$ 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，线性空间。$X$ 中的元素称为向量。

如果向量空间 $X$ 的子集 $Y$，如果对同一数域 $\mathbb{K}$ 上的加法和乘法构成向量空间，则称之为 $X$ 的向量子空间，也等价于 $Y$ 关于加法和乘法封闭。

约定一些记号：

$$x + E := \{x + y : y \in E\}$$

$$\lambda E := \{\lambda y : y \in E\}$$

$$E + F := \{x + y : x \in E, y \in F\}$$

$$\operatorname{span}(E) := \left\{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, x_k \in E, \lambda_k \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

称为 $E$ 张成的子空间。

如果 $E$ 线性无关且 $\operatorname{span}(E) = X$，则称 $E$ 是 $X$ 的 Hamel 基（代数基，线性基）。

**定理 1.4.1**

任一向量空间一定有 Hamel 基。

如果 Hamel 基是有限集，则定义 $\dim X = \#E$，否则记 $\dim X = \infty$.

**定义 1.4.2**

$\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{C}$ 或者 $\mathbb{R}$，$X$ 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，如果函数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ 满足：

1. 正定性
2. 齐次性
3. 三角不等式

则称之为 $X$ 上的一个范数。$(X, ||\cdot||)$ 称为一个赋范空间。定义

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} ||x - y||$$

称为范数诱导的度量，也叫典则度量。

如果 $(X, ||\cdot||)$ 在此度量下完备，则称之为 Banach 空间。

**例 1.4.1.**

Banach 空间的一些例子：

函数空间 $L^p, L^\infty, C(M)$；数列空间 $\ell^p, \ell^\infty$(有界数列空间，$||x||_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{k\geqslant 1} |x_k|$)，$C$(收敛数列空间)，$C_0$(收敛到零的数列全体).

**例 1.4.2.**

$\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界域，$C^k(\overline{\Omega})$ 是 $\overline{\Omega}$ 上 $k$ 次连续可微的函数全体，定义

$$||u||_{k,p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega |\partial^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

这是 $C^k(\overline{\Omega})$ 上的一个范数，

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : ||u||_{k,p} < \infty\}$$

的完备化称为 Sobolev 空间，记作 $H^{k,p}(\Omega)$.

### 1.4.2 范数等价

**定义 1.4.3**

$X$ 是向量空间，$||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 是 $X$ 上的两个范数，称 $||\cdot||_2$ 强于 $||\cdot||_1$ 是指：$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，

$$||x_n||_2 \to 0 \Rightarrow ||x_n||_1 \to 0$$

记作 $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2$. 如果 $||\cdot||_2$ 强于 $||\cdot||_1$，同时 $||\cdot||_1$ 强于 $||\cdot||_2$，则称二者是等价范数。

**命题 1.4.1**

$||\cdot||_2$ 强于 $||\cdot||_1 \Leftrightarrow \exists C > 0$ 使得 $||x||_1 \leqslant C||x||_2, \forall x \in X$.

**证明** 充分性显然，下证必要性：假设不然，则 $\forall n$，存在 $x_n \in X$ 使得 $||x_n||_1 \geqslant m||x_n||_2$，令 $y_n = \frac{x_n}{||x_n||_1}$，则

$$||y_n||_2 \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

$||\cdot||_2$ 强于 $||\cdot||_1$，所以 $||y_n||_1 \to 0$，但是 $||y_n||_1$ 恒等于 1，矛盾。

**推论 1.4.1**

$||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$ 等价，当且仅当存在 $C_1, C_2 > 0$，使得

$$C_1||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant C_2||x||_1, \forall x \in X$$

**例 1.4.3.**

$\mathbb{R}^n$ 上 $||\cdot||_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 彼此等价，因为

$$||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}||x||_\infty$$

**定理 1.4.2**

有限维空间上所有范数都等价。

**证明** 设 $\dim X = n$，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是一组基，$\forall x \in X$ 有唯一表示

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \xi_i \in \mathbb{K}$$

定义映射：$T \to \mathbb{K}^n, x \mapsto (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则 $T$ 是 $X$ 到 $\mathbb{K}$ 的代数同构，设

$$|\xi| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \xi \in \mathbb{K}^n$$

令 $||x||_T = |T(x)|$，则 $||\cdot||_T$ 是 $X$ 上的范数。任取一个 $X$ 上的范数 $||\cdot||$，下面证明 $||\cdot||_T$ 和 $||\cdot||$ 等价。

定义函数

$$p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \xi \mapsto ||\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i||$$

1. $p(\xi)=|\xi|\cdot p(\frac{\xi}{|\xi|}),\forall\xi\neq0.$
2. $p$ 在 $\mathbb{K}$ 上连续：

$$\begin{aligned}|p(a)-p(b)|&=\left|||\sum_{i=1}^n a_ie_i||-||\sum_{i=1}^n b_ie_i||\right|\\&\leqslant||\sum_{i=1}^n(a_i-b_i)e_i||\\&\leqslant\sum_{i=1}^n|a_i-b_i|e_i\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^n||e_i||^2\right)^{\frac12}|a-b|\end{aligned}$$

最后一步是 Caurhy-Schwarz 不等式。

令 $S_1=\{\xi\in\mathbb{K}^n:|\xi|=1\}$，则 $S_1$ 是紧集，故 $p$ 在 $S_1$ 上存在最小值和最大值，分别记作 $C_1$ 和 $C_2$，从而

$$\begin{aligned}&\Rightarrow C_1\leqslant p(\frac{\xi}{|\xi|})\leqslant C_2,\forall\xi\neq0\\&\Rightarrow C_1|\xi|\leqslant p(\xi)\leqslant C_2|\xi|,\forall\xi\\&\Rightarrow C_1|T(x)|\leqslant p(T(x))\leqslant C_2|T(x)|,\forall x\in X\\&\Leftrightarrow C_1||x||_T\leqslant||x||\leqslant C_2||x||_T\end{aligned}$$

只需证明 $C_1>0$，假设 $C_1=0$，则存在 $\xi^*\in S_1$ 使得

$$||\sum_{i=1}^n\xi_i^*e_i||=p(\xi^*)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^n\xi_i^*e_i=0\Rightarrow\xi^*=0$$

这与 $\xi^*\in S_1$ 矛盾。

**推论 1.4.2**

同维数的两个有限维赋范空间（作为向量空间）代数同构且（作为拓扑空间）同胚。

**证明**

$$T:X\to\mathbb{K}^n,x=\sum_{i=1}^n\xi_ie_i\mapsto\xi$$

是一个代数同构，满足

$$C_1|T(x)|\leqslant||x||\leqslant C_2|T(x)|,\forall x\in X$$

第一个不等号得到 $T$ 连续，第二个不等号得到 $T^{-1}$ 连续，故 $T$ 也是同胚。

**推论 1.4.3**

有限维赋范空间一定是 Banach 空间。

**证明** $C_1|T(x)|\leqslant||x||\leqslant C_2|T(x)|$，设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $X$ 中基本列，则 $\{T(x_n)\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbb{K}^n$ 中基本列，设 $T(x_k)\to\xi$，

$$||x_n-T^{-1}(\xi)||\leqslant C_2|T(x_n)-\xi|\to0$$

**推论 1.4.4**

任何赋范空间的有限维子空间一定是闭子空间。(作业)

**证明** 任何赋范空间的有限维子空间是有限维赋范空间，所以是 Banach 空间，所有的收敛列都是柯西列，所有的柯西列都收敛到子空间内某点，所以是闭子空间。

**定理 1.4.3**

赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，$X$ 中单位球面列紧 $\Leftrightarrow \dim X < \infty$.

**引理 1.4.1 (Riesz)**

赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，$(Y, ||\cdot||)$ 是 $X$ 的闭子空间，$Y \neq X$，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists e \in X$ with $||e|| = 1$，使得

$$\mathrm{dist}(e, Y) := \inf_{y \in Y} ||e - y|| \geqslant 1 - \varepsilon$$

证明 取 $x \in X \backslash Y$，令

$$d_i = \mathrm{dist}(x, y) = \inf_{y \in Y} ||x - y||$$

$Y$ 是闭集，$d > 0$，且存在 $y_0 \in Y$ 使得

$$d \leqslant ||x - y_0|| \leqslant \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

令

$$e \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{x - y_0}{||x - y_0||} \Rightarrow ||e|| = 1, e \notin Y$$

$\forall \zeta \in Y$，

$$\begin{aligned} ||e - \zeta|| &= ||\frac{x - y_0}{||x - y_0||} - \zeta|| \\ &= \frac{1}{||x - y_0||} \cdot ||x - \underbrace{(y_0 + ||x - y_0||\zeta)}_{\text{这一堆} \in Y}|| \\ &\geqslant \frac{1 - \varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{dist}(e, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$.

证明 充分性：

$$T : X \to \mathbb{K}^n, x = \sum \xi_i e_i \mapsto \xi$$

满足

$$C_1 |T(x)| \leqslant ||x|| \leqslant C_2 |T(x)|$$

于是 $T(S_1)$ 有界，故列紧，

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_1, \exists T(x_{n_k}) \to y \in \mathbb{K}^n \\ &\Rightarrow x_{n_k} \to T^{-1}(y) \in X \end{aligned}$$

必要性：假设 $\dim X = \infty$，则存在一列向量 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关，令子空间

$$X_n \overset{\mathrm{def}}{=} \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle, n = 1, 2, \cdots$$

于是 $X_n \subsetneq X_{n+1}$ 且是闭子空间，由引理，取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，$\forall n \in \mathbb{N}$，存在 $x_n \in X_n$ with $||x_n|| = 1$，使得

$$\mathrm{dist}(x_n, X_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow ||x_n - x_m|| \geqslant \frac{1}{2}, \forall n \neq m \\ &\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{没有收敛子列} \end{aligned}$$

这与 $S_1$ 列紧矛盾。

### 1.4.3 商空间

**定义 1.4.4 (商空间)**

赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，$(X_0, ||\cdot||)$ 是 $X$ 的闭子空间。在 $X$ 中定义

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in X_0$$

$[x] \overset{\text{def}}{=} x$ 所在的等价类，

$$X/X_0 \overset{\text{def}}{=} \{[x] : x \in X\}$$

定义运算：

$$[x] + [y] = [x + y], \lambda[x] = [\lambda x]$$

则 $X/X_0$ 成为向量空间。并定义：

$$||[x]||_* \overset{\text{def}}{=} \inf_{y\in[x]} ||y||$$

注 注意这里必须要求 $X_0$ 是闭子空间。

**定理 1.4.4**

$||\cdot||_*$ 是 $X/X_0$ 上的范数。

证明

1. 正定性：$\forall y \in X, ||y|| \geqslant 0 \Rightarrow ||[x]||_* \geqslant 0$，
$$||[x]||_* = 0 \Rightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [x] \text{ s.t. } ||x_n|| \to 0$$
$$\Rightarrow x_n \to 0$$
$[x] = x + X_0$ 是闭集，所以 $0 \in [x]$，进而可得 $[x] = [0]$.
2. 齐次性：显然。
3. 三角不等式：由下确界的定义，$\forall\varepsilon$，
$$\exists x' \in [x] \text{ s.t. } ||x'|| < ||[x]||_* + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists y' \in [y] \text{ s.t. } ||y'|| < ||[y]||_* + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Rightarrow ||x' + y'|| \leqslant ||x'|| + ||y'|| \leqslant ||[x]||_* + ||[y]||_* + \varepsilon$$
$$\overset{x'+y'\in[x+y]}{\Rightarrow} ||[x + y]||_* \leqslant ||[x]||_* + ||[y]||_* + \varepsilon$$
$$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} ||[x + y]||_* \leqslant ||[x]||_* + ||[y]||_*$$

**定理 1.4.5**

$(X, ||\cdot||)$ 完备，则 $(X/X_0, ||\cdot||_*)$ 也完备。

**引理 1.4.2**

$X$ 完备 $\Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{收敛}$$

证明 习题 1.4.7.

**证明** 由引理，只需证明 $X/X_0$ 中任一绝对收敛级数都收敛。设

$$\sum_{n=1}^{\infty}|||[x_n]|||_* < \infty$$

对每个 $n$，

$$\begin{aligned}
&\exists y_n \in X_0 \text{ s.t. } ||x_n + y_n|| \leqslant |||[x_n]|||_* + \frac{1}{2^n} \\
&\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}||x_n + y_n|| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|||[x_n]|||_* + 1 < \infty \\
&\overset{X\text{完备}}{\Leftrightarrow} \exists x \in X \text{ s.t. } ||\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) - x|| \to 0 \text{ as } n \to \infty \\
&\Rightarrow ||\sum_{k=1}^{n}[x_j] - [x]||_* \overset{y_k \in X_0}{=} |||[\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) - x]|||_* \leqslant ||\sum_{k=1}^{n}(x_k + y_k) - x|| \to 0 \text{ as } n \to \infty
\end{aligned}$$

# 1.5 内积空间

## 1.5.1 Hilbert 空间

**定义 1.5.1**

$X$ 是 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，如果函数

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

满足：

1. 对第一变元线性：$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y\rangle = \alpha\langle x_1, y\rangle + \beta\langle x_2, y\rangle$.
2. 对第二变元共轭线性：$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y_1\rangle + \overline{\beta}\langle x, y_2\rangle$.
3. 共轭对称：$\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$.
4. $\langle x, x\rangle \geqslant 0, \forall x \in X$. 等号成立当且仅当 $x = 0$.

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 $X$ 上的一个内积，$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称为内积空间。

**引理 1.5.1 (Cauthy-Schwarz)**

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，令

$$||x|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\langle x, x\rangle}, x \in X$$

则 $|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||, \forall x, y \in X$，等号成立当且仅当存在 $\lambda \in \mathbb{K}$，使得 $x = \lambda y$.

**证明** 不妨设 $y \neq 0$，则 $\forall \lambda \in \mathbb{K}$，

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \\
&= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\{\overline{\lambda}\langle x, y\rangle\} + |\lambda|^2||y||^2
\end{aligned}$$

这里取 $\lambda = -\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}$，

$$0 \leqslant ||x||^2 - 2\mathrm{Re}\{\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2}\} + \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^4}\cdot||y||^2 = ||x||^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2}$$

于是得证。

**命题 1.5.1**

Cauthy-Schwarz 引理中的 $||x||$ 是一个范数。

**证明** 只需验证三角不等式：

$$\begin{aligned}||x+y||^2 &= ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leqslant ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2\end{aligned}$$

**定义 1.5.2**

如果一个内积空间在其内积诱导范数下是一个 Banach 空间，则称之为 Hilbert 空间。

**例 1.5.1.**

$\ell^2$ 是一个 Hilbert 空间。（作业）

**证明** 只需证明 $\ell^2$ 完备。任取 $\ell^2$ 上基本列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ s.t. } ||x^{(n)} - x^{(m)}||_2 < \varepsilon, \forall n, m \geqslant N$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon, \forall n, m \geqslant N \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \forall \text{固定} k, |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon, \forall n, m \geqslant N \\ &\Rightarrow \{x_k^n\}_{n=1}^{\infty} \text{是 } \mathbb{R} \text{ 中基本列} \\ &\Rightarrow \exists x_k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x_k^{(n)} \to x_k \text{ as } n \to \infty\end{aligned}$$

令 $x \overset{\text{def}}{=} \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$，Claim：$x \in \ell^2$ 且 $||x^{(n)} \to x||_2 \to 0$. 由 (1)，$\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon^2, \forall n, m \geqslant N$$

$$\overset{m\to\infty}{\Rightarrow} \forall p, \sum_{k=1}^{p} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leqslant \varepsilon^2, \forall n \geqslant N$$

$$\overset{p\to\infty}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k|^2 \leqslant \varepsilon^2, \forall n \geqslant N \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow x - x^{(N)} \in \ell^2 \\ &\Rightarrow x = x - x^{(N)} + x^{(N)} \in \ell^2\end{aligned}$$

而且 (2) 就是

$$||x^{(n)} - x||_2 \leqslant \varepsilon, \forall n \geqslant N \Rightarrow ||x^{(n)} - x||_2 \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

**命题 1.5.2 (极化恒等式)**

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，内积诱导范数 $||x||$，

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$，则
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2)$$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$，则
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^3 ||x + \mathrm{i}^k y||^2$$

（作业）

**证明** $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(||x+y||^2-||x||^2-||y||^2)&=\frac{1}{2}(\langle x+y,x+y\rangle-\langle x,x\rangle-\langle y,y\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle x+y,x\rangle+\langle x+y,y\rangle-\langle x,x\rangle-\langle y,y\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle)\\&=\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k||x+\mathrm{i}^ky||^2&=\frac{1}{4}(\langle x+y,x+y\rangle+\mathrm{i}\langle x+\mathrm{i}y,x+\mathrm{i}y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle-\mathrm{i}\langle x-\mathrm{i}y,x-\mathrm{i}y\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\mathrm{i}\langle x,\mathrm{i}y\rangle+\mathrm{i}\langle \mathrm{i}y,x\rangle)\\&=\frac{1}{2}(\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle)\\&=\langle x,y\rangle\end{aligned}$$

**命题 1.5.3 (平行四边形法则，P.L.)**

$(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，内积诱导范数 $||\cdot||$，

$$||x+y||^2+||x-y||^2=2(||x||^2+||y||^2)$$

（作业）

**证明**

$$\begin{aligned}||x+y||^2+||x-y||^2&=\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle++\langle x,-y\rangle+\langle -y,x\rangle\\&=2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle\\&=2(||x||^2+||y||^2)\end{aligned}$$

**定理 1.5.1 (Frechet-von Neumann)**

$(X,||\cdot||)$ 是赋范空间，$||\cdot||$ 可由某个内积诱导出 $\Leftrightarrow$ $||\cdot||$ 满足 P.L.（作业）

**证明** 必要性显然，只说明充分性：先考虑 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，令

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(||x+y||^2-||x-y||^2)$$

如果能证明 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个内积，那么其诱导度量 $||\cdot||$.

(1) $\langle x,x\rangle=||x||\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x=0$.

(2) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$.

(3) 考虑

$$\begin{aligned}\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle&=\frac{1}{4}(||x+z||^2-||x-z||^2)+\frac{1}{4}(||y+z||^2-||y-z||^2)\\&=\frac{1}{8}(2||x+z||^2+2||y+z||^2)-\frac{1}{8}(2||x-z||^2+2||y-z||^2)\\&=\frac{1}{8}(||x+y+2z||^2+||x-y||^2)-\frac{1}{8}(||x+y-2z||^2+||x-y||^2)\\&=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle\end{aligned}$$

特别地，当 $y=0$，

$$\langle 0,z\rangle=\frac{1}{4}(||0+z||^2-||0-z||^2)=0$$

$$\Rightarrow \langle x,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle 0,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x,2z\rangle$$

上式中 $x$ 替换为 $x+y$，

$$\langle x+y,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle$$

于是

$$\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\frac{1}{2}\langle x+y,2z\rangle=\langle x+y,z\rangle$$

(4) 由 (3)，

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle+\langle x,-y\rangle=\langle x-x,y\rangle=\langle 0,y\rangle=0\\&\Rightarrow\langle -x,y\rangle=-\langle x,y\rangle\\&n\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle+\cdots+\langle x,y\rangle=\langle nx,y\rangle\\&n\langle\frac{m}{n}x,y\rangle=\langle mx,y\rangle=m\langle x,y\rangle\\&\Rightarrow\frac{m}{n}\langle x,y\rangle=\langle\frac{m}{n}x,y\rangle,\ n,m\in\mathbb{N}_+\end{aligned}$$

因此当 $\lambda\in\mathbb{Q}$ 时，$\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$. 对于任意实数 $a$，取有理数列 $a_n\to a$，则有

$$\langle ax,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle a_nx,y\rangle=\lim_{n\to\infty}a_n\langle x,y\rangle=a\langle x,y\rangle$$

综上可知 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是一个内积。对于 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ 的情况，取

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\mathrm{i}^k||x+\mathrm{i}^ky||^2$$

其余过程同理。

**定义 1.5.3**

如果 $\langle x,y\rangle=0$，则称 $x$ 与 $y$ 正交，记为 $x\perp y$. 对于 $M\subset X$，如果 $\forall y\in M$ 都有 $x\perp y$，则记 $x\perp M$.

$$M^{\perp}\overset{\text{def}}{=}\{x\in X:x\perp M\}$$

称为 $M$ 的正交补。

**命题 1.5.4 (勾股定理)**

$x\perp y\Rightarrow ||x+y||^2=||x||^2+||y||^2$

**命题 1.5.5**

$\overline{M}=X$，$x\perp M$，则 $x=0$.

**证明** $x \in X$，存在 $y_n \in M$ 使得 $y_n \to x$，于是

$$0 = \langle x, y_n \rangle \to \langle x, x \rangle$$

所以 $x = 0$.

实际上证明的是 $x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{M}$.

**命题 1.5.6**

$x \perp M \Rightarrow x \perp \operatorname{span} M$.

**命题 1.5.7**

$M^{\perp}$ 是闭子空间。

**证明** 显然 $M^{\perp}$ 是向量子空间，设 $M^{\perp} \ni x_n \to x$，

$$\begin{aligned} &\forall y \in M, 0 = \langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \\ \Rightarrow &\langle x, y \rangle = 0 \\ \Rightarrow &x \in M^{\perp} \end{aligned}$$

## 1.5.2 正交与正交基

**定义 1.5.4**

如果 $S = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset X$ 满足

$$e_\alpha \perp e_\beta, \forall \alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$$

则称 $S$ 是 $X$ 中的一个正交集，如果 $S$ 还满足 $||e_\alpha|| = 1, \forall \alpha \in \Lambda$，则称之为规范正交集，简记为 O.N.S.

若一个正交集 $S$ 满足 $S^{\perp} = \{0\}$，则称 $S$ 完备。

**定理 1.5.2**

非平凡内积空间中一定有完备正交集。

**定义 1.5.5**

非空集合 $X$ 上的一个偏序“$\leqslant$”是指满足以下条件的一个关系：

1. 传递性：$x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$.
2. 反身性：$x \leqslant x$.
3. $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$.

$(X, \leqslant)$ 称为一个偏序集。

如果 $\forall x, y \in X$，$x \leqslant y$ 或者 $y \leqslant x$ 必有其一，则称“$\leqslant$”是 $X$ 上的一个全序。

对于 $Y \subset X$，如果存在 $p \in X$ 使得 $\forall y \in Y$ 有 $y \leqslant p$，称 $p$ 是 $Y$ 的一个上界。

如果存在 $m \in X$ 使得 $m \leqslant x \Rightarrow x = m$，则称 $m$ 是 $X$ 上的一个极大元。

**引理 1.5.2 (Zorn)**

$(X, \leqslant)$ 是一个偏序集，$X$ 的每个全序子集都有上界，则 $X$ 必有极大元。

**证明** 令 $\mathcal{F}$ 为 $X$ 中正交集全体，$\subset$ 是集合的包含关系，则 $(\mathcal{F}, \subset)$ 是偏序集，设 $M$ 是 $\mathcal{F}$ 中的任一全序子集，令

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{C \in M} C$$

于是 $P$ 是 $M$ 的一个上界，这是因为任取 $C \in X$ 都有 $C \subset P$. 由 Zorn 引理，$\mathcal{F}$ 有极大元 $S$，则 $S$ 完备，否则 $\exists x_0 \neq 0$ s.t. $x_0 \perp S$，$S \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}$，与 $S$ 的极大性矛盾。

**定义 1.5.6**

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，$S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 O.N.S. 如果 $\forall x \in X$ 均可表示为[a]

$$x = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle \cdot e_\alpha$$

则称 $S$ 是 $X$ 的一个规范正交基，简称 O.N.B. 其中的 $\{\langle x, e_\alpha\rangle\}$ 称为 $x$ 的 Fourier 系数。

[a] 其实对于不可数个量相加没有很合适的定义，这里的形式和需要要求 $\{\langle x, e_\alpha\rangle\}_{\alpha\in\Lambda}$ 只有至多可数个非零。

**定理 1.5.3 (Bessel 不等式)**

$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 O.N.S. 则

$$\forall x \in X, \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$$

**证明** **Step1**：

$$\forall\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\} \subset \Lambda, \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant & \left\langle x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}, x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k} \right\rangle \\
=& ||x||^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle \langle e_{\alpha_i}, x\rangle - \sum_{i=1}^{N} \overline{\langle x, e_{\alpha_k}\rangle} \langle e_{\alpha_k}, x\rangle + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \langle e_{\alpha_i}, x\rangle \overline{\langle x, e_{\alpha_k}\rangle} \underbrace{\langle e_{\alpha_i}, e_{\alpha_k}\rangle}_{\text{这一项}=\delta_{ik}} \\
=& ||x||^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2
\end{aligned}$$

**Step2**：

$$\Lambda' \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Lambda : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} \text{至多可数}$$

令

$$\lambda_n \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Lambda : |\langle x, e_\alpha\rangle| > \frac{1}{n}\}, n = 1, 2, \cdots$$

所有的 $\Lambda_n$ 是有限集，否则存在 $n_0$ 使得 $\Lambda_{n_0}$ 是无限集，取 $N$ 充分大使得

$$\frac{N}{n_0^2} > ||x||^2$$

任取 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \Lambda_{n_0}$，

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 > \frac{N}{n_0^2} > ||x||^2$$

这与 Step1 矛盾，进而 $\Lambda' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ 至多可数。

**Step3**：给 $\Lambda'$ 一个排列，即设 $\Lambda' = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$，由 Step1，$\forall N$，

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \leqslant ||x||^2 \\
\Rightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 \leqslant ||x||^2 \\
\Rightarrow & \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda'} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leqslant ||x||^2
\end{aligned}$$

引入最佳逼近元的概念：用一组函数的线性组合去逼近一个给定的函数等价于给定 $x \in X$，$e_1, \cdots, e_n \in X$，求 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k|| = \inf_{\alpha \in \mathbb{K}^n} ||x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||$$

等价于：令 $M \overset{def}{=} \text{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$，求 $y_0 \in M$ 使得 $\text{dist}(x, y_0) = \text{dist}(x, M)$.

**定理 1.5.4**

赋范空间 $(X, ||\cdot||)$，$e_1, \cdots, e_n \in X$，$\forall x \in X$，存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$||x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k|| = \inf_{\alpha \in \mathbb{K}^n} ||x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||$$

**证明** 不妨设 $e_1, \cdots, e_n$ 线性无关，对 $x \in X$，定义

$$F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto ||x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||$$

则：

1. $F$ 连续；
2. $$F(\alpha) \geqslant ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| - ||x||$$

令

$$|||\alpha||| \overset{\text{def}}{=} ||\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k||$$

于是 $|||\cdot|||$ 是 $\mathbb{K}^n$ 上的范数，由于有限维空间上范数等价，

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } |||\alpha||| \geqslant C|\alpha|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}^n$$
$$\overset{2}{\Rightarrow} F(\alpha) \geqslant C|\alpha| - ||x|| \to +\infty \text{ as } |\alpha| \to \infty$$

因此 $F$ 在 $\mathbb{K}^n$ 上可以取到最小值。

**引理 1.5.3 (变分引理)**

$H$ 是 Hilbert 空间，$M$ 是非空闭凸集，则

$$\forall x \in X, \exists! y \in M \text{ s.t. } ||x - y|| = \text{dist}(x, M)$$

**证明** 设

$$d \overset{\text{def}}{=} \text{dist}(x, M) = \inf_{\zeta \in M} ||x - \zeta||$$

则存在 $y_n \in M, n = 1, 2, \cdots$ s.t. $d \leqslant ||y_n - x|| \leqslant d + \frac{1}{n}$.

下面证明 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本列。由 P.L.

$$\begin{aligned}
&||(y_n - x) + (y_m - x)||^2 + ||(y_n - x) - (y_m - x)||^2 = 2(||y_n - x||^2 + ||y_m - x||^2) \\
\Rightarrow &||y_n - y_m||^2 = 2(||y_n - x||^2 + ||y_m - x||^2) - 4||\frac{y_n + y_m}{2} - x||^2 \\
&\leqslant 2((d + \frac{1}{n})^2 + (d + \frac{1}{m})^2) - 4d^2 \to 0 \text{ as } n, m \to \infty
\end{aligned}$$

$H$ 完备，设 $y_n \to y$，因为 $M$ 是闭集，故 $y \in M$，因此：

$$d \leqslant ||y - x|| \leqslant ||y - y_n|| + ||y_n - x|| \leqslant ||y - y_n|| + d + \frac{1}{n}$$

$n$ 充分大时，右式 $\to d^+$，于是 $||y - x|| = d$.

唯一性：假设还有 $y' \in M$ s.t. $||y'-x|| = d$，

$$||y'-y||^2 = 2(||y'-x||^2 + ||y-x||^2) - 4||\frac{y'+y}{2} - x||^2 \leqslant 4d^2 - 4d^2 = 0$$

所以 $y' = y$.

**定理 1.5.5 (正交分解)**

$H$ 是 Hilbert 空间，$M$ 是闭子空间，则 $H = M \oplus M^{\perp}$，即 $\forall x \in H$，存在唯一的 $y \in M$ 和 $\zeta \in M^{\perp}$ 使得 $x = y + \zeta$.

**证明** $\forall x \in H$，由变分引理，存在唯一 $y \in M$ 使得

$$||x-y|| = \mathrm{dist}(x, M)$$

Claim:$x - y \in M^{\perp}$，$\forall 0 \neq w \in M, \forall \lambda \in \mathbb{K}$，

$$\Rightarrow y + \lambda w \in M$$

$$\Rightarrow d^2 \leqslant ||x-(y+\lambda w)||^2 = ||x-y||^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x-y, w\rangle) + |\lambda|^2||w||^2$$

取 $\lambda = \frac{\langle x-y,w\rangle}{||w||^2}$，

$$d^2 \leqslant ||x-y||^2 - 2\frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^2} + \frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^2} = d^2 - \frac{|\langle x-y,w\rangle|^2}{||w||^2}$$

$$\Rightarrow \langle x-y, w\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x - y \in M^{\perp}$$

**定义 1.5.7**

映射 $P_M : H \to M, x \mapsto y$，这里 $y$ 是满足变分引理的 $y$，称之为 $x$ 在 $M$ 中的最佳逼近元，此映射被称为 $H$ 到 $M$ 的正交投影。

**推论 1.5.1**

1. $P_M(x) \in M$，$x - P_M(x) \in M^{\perp}$.
2. $\mathrm{Im}(P_M) = M$，$\mathrm{Ker}(P_M) = M^{\perp}$.
3. $||x - P_M(x)|| = \mathrm{dist}(x, M)$.
4. $P_M^2 = P_M$.
5. $||P_M(x)|| \leqslant ||x||$.
6. $I - P_M = P_{M^{\perp}}$.

在 Bessel 不等式的证明中，$\sum_{\alpha\in\Lambda'} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2$ 和 $\Lambda'$ 的排列无关，那 $\sum_{\alpha\in\Lambda'} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$ 呢？

**引理 1.5.4**

$H$ 是 Hilbert 空间，$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 O.N.S. 则

$$\forall x \in H, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \in H$$

令 $M = \overline{\mathrm{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}}$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k = P_M(x)$$

**证明** 由 Bessel，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant ||x||^2 \\
\Rightarrow &|| \sum_{k=n}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k ||^2 = \sum_{[} k = n]^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\
\Rightarrow &\left\{ \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是 } H \text{ 中的基本列} \\
\Rightarrow &\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \stackrel{\text{def}}{=} \lim^{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \in H
\end{aligned}
$$

进而，由于

$$
\begin{aligned}
&\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k, e_m \right\rangle = 0, \forall m \\
\Rightarrow &x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k \in M^{\perp} \\
\Rightarrow &\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k = P_M(x)
\end{aligned}
$$

**推论 1.5.2**

对 $\mathbb{N}$ 上任一置换 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x, e_{\sigma(k)} \right\rangle e_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k
$$

**证明** 令 $M \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}}$，$\tilde{M} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{span}\{e_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}}$，于是 $M = \tilde{M}$，

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle x, e_{\sigma(k)} \right\rangle e_{\sigma(k)} = P_{\tilde{M}}(x) = P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle
$$

**推论 1.5.3**

$H$ 是 Hilbert 空间，$\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 O.N.S. 则 $\forall x \in H$，

$$
\sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \in H
$$

且

$$
||x - \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha||^2 = ||x||^2 - \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2
$$

**证明** 设

$$
\Lambda' \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \Lambda : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}\text{（任一顺序）}
$$

则

$$
\sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k} \in H
$$

且

$$\|x-\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{N}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2$$

$$\underset{\text{范数连续}}{\overset{N\to\infty}{\Rightarrow}}\|x-\sum_{k=1}^{N}\langle x,e_{\alpha_k}\rangle e_{\alpha_k}\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{\infty}|\langle x,e_{\alpha_k}\rangle|^2$$

**定理 1.5.6**

$H$ 是 Hilbert 空间，$S=\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 O.N.S. 则下列命题等价：

1. $S^\perp=\{0\}$.
2. $S$ 是 O.N.B.
3. $S$ 满足：

$$\forall x\in H,\|x\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x,e_\alpha\rangle|^2$$

这被称为 Parseval 恒等式，简称 P.I.

**证明** **Step1**：$S^\perp=\{0\}\Rightarrow S$ 是 O.N.B. 假设不然，则

$$\exists x_0\in H\text{ s.t. }\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha\neq x_0$$

$$\forall\beta\in\Lambda,\left\langle x_0-\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha,e_\beta\right\rangle=\langle x_0,e_\beta\rangle-\langle x_0,e_\beta\rangle=0$$

$$\Rightarrow 0\neq x_0-\sum_{\alpha\in\Lambda}\langle x_0,e_\alpha\rangle e_\alpha\perp S$$

$$\Rightarrow S^\perp\neq\{0\}$$

矛盾。

**Step2**：由推论 1.5.3，$S$ 是 O.N.B.$\Rightarrow$ 满足 Parseval。

**Step3**：满足 Parseval$\Rightarrow S^\perp=\{0\}$，否则

$$\exists x_0\neq 0\text{ s.t. }x_0\perp S$$

$$\Rightarrow\langle x_0,e_\alpha\rangle=0,\forall\alpha\in\Lambda$$

$$\Rightarrow\sum_{\alpha\in\Lambda}|\langle x_0,e_\alpha\rangle|^2=0$$

$$\overset{\text{Parseval}}{\Rightarrow}\|x_0\|^2=0$$

矛盾。

**例 1.5.2.**

数列空间 $\ell^2$，$e_n$ 的第 $n$ 个分量为 1，其余分量为 0，则 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 是 $\ell^2$ 的一个 O.N.B. 但它不是 $\ell^2$ 的 Hamel 基。[a]

[a] 向量空间的 Hamel 基是指任何一个向量可以写成有限个基中向量的线性组合，此处不满足“有限”的条件。

**推论 1.5.4**

非平凡 Hilbert 空间一定有 O.N.B.

### 1.5.3 正交化与同构

**定理 1.5.7 (Gram-Schmidt 正交化)**

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是内积空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关，则存在一列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 相互正交，且

$$\forall n, \operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^{n} = \operatorname{span}\{x_k\}_{k=1}^{n}$$

♡

**证明** 只需按照以下步骤构造即可：

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 && e_1 = \tfrac{y_1}{||y_1||}\\
&y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1 && e_2 = \tfrac{y_2}{||y_2||}\\
&\vdots\\
&y_n = x_n - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k && e_n = \tfrac{y_n}{||y_n||}
\end{aligned}$$

$\forall m \neq n$，设 $m < n$，

$$\begin{aligned}
\langle e_m, e_n\rangle &= \frac{1}{||y_n||}\left\langle e_m, x - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k\rangle e_k\right\rangle\\
&= \frac{1}{||y_n||}\left(\left\langle e_m, x - \sum_{k=1}^{n-1} \langle e_m, x\rangle e_k\right\rangle - \overline{\langle x_n, e_m\rangle}\right) = 0
\end{aligned}$$

且

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_k, e_i\rangle e_i = x_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} x_j$$

得到

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

所以 $\operatorname{span}\{y_k\}_{k=1}^{n} = \operatorname{span}\{x_k\}_{k=1}^{n}$，进而 $\operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^{n} = \operatorname{span}\{x_k\}_{k=1}^{n}$.

**定义 1.5.8**

$(X_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ 和 $(X_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是内积空间，如果存在线性同构 $T : X_1 \to X_2$ 使得

$$\langle T(x), T(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1, \forall x, y \in X_1$$

则称 $X_1$ 和 $X_2$ 作为内积空间同构，记为 $X_1 \cong X_2$.

♣

**定理 1.5.8**

$H$ 是 Hilbert 空间，$H$ 可分 $\Leftrightarrow$ $H$ 有可数的 O.N.B.

♡

**证明** 必要性：如果 $\dim H \neq \infty$ 则显然，下面假设 $\dim H = \infty$,

$$\begin{aligned}
\text{可分} \Rightarrow &\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H \text{ s.t. } \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = H\\
\Rightarrow &\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{线性无关}\\
\Rightarrow &\exists \{e_n\}_{n=1}^{\infty}\text{正交且}\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \operatorname{span}\{x_n\}_{k=n}^{\infty}\\
\Rightarrow &\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}} = \overline{\operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = H\\
\Rightarrow &(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})^{\perp} = \{0\}\\
\Rightarrow &\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\text{是 O.N.B.}
\end{aligned}$$

充分性：令

$$\mathrm{span}^{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}) \overset{\text{def}}{=} \{e_n\}_{n=1}^{\infty} \text{中向量以 } \mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q} \text{ 中元素为系数的线性组合全体}$$

于是 $\mathrm{span}^{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})$ 可数，下证 $\overline{\mathrm{span}^{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n=1}^{\infty})} = H$.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n, \exists \alpha_n \in \mathbb{Q}+\mathrm{i}\mathbb{Q} \text{ s.t. } |\alpha_n - \langle x, e_n\rangle| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow || \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n ||^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle - \alpha_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \forall N$$

而当 $N$ 充分大时，

$$|| \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$|| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n e_n - x|| < \varepsilon$$

**定理 1.5.9**

1. $n$ 维 Hilbert 空间 $\cong \mathbb{K}^n$.
2. 无穷维可分 Hilbert 空间 $\cong \ell^2$.

**证明** 1 以前已经证明过，只说明一下 2：设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $H$ 的可数 O.N.B. 定义

$$T : H \to \ell^2, x \mapsto \{\langle x, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$$

1° 线性：显然。

2° 等距：由 Parseval，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = ||x||^2$$

3° 单射：由等距可得。

4° 满射：

$$\forall a \in \ell^2, || \sum_{k=n}^{m} a_k e_k ||^2 = \sum_{k=n}^{m} |a_k|^2 \to 0 \text{ as } n, m \to \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k e_n \to x \in H \text{ and } \langle x, e_k\rangle = a_k$$

$$\Rightarrow T(x) = a$$

5° 保内积：

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty} \langle y, e_m\rangle e_m \right\rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_m\rangle} \langle e_n, e_m\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle} \\ &= \langle T(x), T(y)\rangle_{\ell^2}\end{aligned}$$

## 1.6 应用：Fourier 级数

**定义 1.6.1**

设

$$\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

对于 $\Pi$ 上的函数 $F$，令

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}), t \in \mathbb{R}$$

于是 $f$ 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的周期函数。令

$$e_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kt}, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

于是 $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2(\Pi)$ 中的 O.N.S. 称为三角函数系。

$$\hat{f}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = \langle f, e_k \rangle$$

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx} = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k$$

**定理 1.6.1**

$\forall f \in L^2(\Pi)$，

$$||S_N(f) - f||_2 \to 0 \text{ as } N \to \infty$$

其中

$$S_N(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kx}$$

**证明** Thm$\Leftrightarrow \{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 是 $L^2(\Pi)$ 中的 O.N.B. $\Leftrightarrow (\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty})^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{span}\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}} = L^2(\Pi)$. 从而约化为证明：$\forall f \in L^2(\Pi)$ 可由三角多项式以 $L^2$ 范数逼近。

$$S_N(f)(x) = (f * D_N)(x) \text{ with } D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}kt} = \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}$$

令

$$\begin{aligned}\sigma_N &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(f) \\ &= f * \left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} D_k\right) = f * F_N\end{aligned}$$

这里 $F_N(t)$ 是 Fejér 核：

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N} D_k(t) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin^2[(N+1)\pi t]}{\sin^2(\pi t)}$$

**引理 1.6.1**

1.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_N(t)\mathrm{d}t = 1$$

2. $\forall \delta > 0$，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\mathrm{d}t = 0$$

证明 1 直接计算验证，只说明一下 2：当 $\delta < |t| < \frac{1}{2}$ 时，

$$0 \leqslant F_N(t) \leqslant \frac{1}{N+1}\frac{1}{\sin^2(\pi\delta)} \to 0 \text{ as } N \to \infty$$

**引理 1.6.2**

$\forall f \in L^2(\Pi)$，

$$||\sigma_N(f) - f||_2 \to 0 \text{ as } N \to \infty$$

证明

$$\begin{aligned}
||\sigma_N(f) - f||_2 &= \sqrt{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x-t) - f(x)] F_N(t)\mathrm{d}t \right|^2 \mathrm{d}x} \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leqslant} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} ||f(\cdot - t) - f(\cdot)||_2 F_N(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\leqslant\delta} \cdots + \int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} \cdots \\
&\leqslant \underbrace{\int_{|t|\leqslant\delta} \cdots}_{\text{积分的绝对连续性}} + 2||f||_2 \underbrace{\int_{\delta<|t|<\frac{1}{2}} F_N(t)\mathrm{d}t}_{\text{引理 1.6.1}} \to 0 \text{ as } N \to \infty
\end{aligned}$$

注意

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) \hat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx}$$

上述引理说明三角多项式全体在 $L^2(\Pi)$ 中稠密。

# 第 2 章 线性算子与线性泛函

## 2.1 线性算子

### 2.1.1 有界线性算子

**定义 2.1.1**

$X$ 和 $Y$ 是向量空间，如果映射 $T: X \to Y$ 满足

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

则称 $T$ 是线性算子，简称 L.O.

特别地，如果 $Y = \mathbb{K}$，则称 $T$ 是线性泛函。

**例 2.1.1.**

微分算子：开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$X = Y = C^\infty(\Omega)$，定义

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \partial^\alpha$$

**例 2.1.2.**

积分算子：$X = L^p(\Omega)$，$Y = L(\Omega)$，即全体可测函数。$K(\cdot, \cdot)$ 是 $\Omega \times \Omega$ 上的可测函数，称之为积分核。

$$T : u(x) \mapsto \int_\Omega K(x, y) u(y) \mathrm{d}y$$

如：Poisson 积分：

$$P[u](\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \zeta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|^2} u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta$$

Fourier 变换：

$$(\mathcal{F}u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot y} u(y) \mathrm{d}y$$

**例 2.1.3.**

非线性的例子：

$$f(u) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega u^2(x)\mathrm{d}x$$

**定义 2.1.2**

$(X, ||\cdot||_X)$ 和 $(Y, ||\cdot||_Y)$ 是赋范空间，$T: X \to Y$ 是 L.O. 如果存在 $C > 0$ 使得

$$||Tx||_Y \leqslant C||x||_X, \forall x \in X$$

则称 $T$ 有界。

**定理 2.1.1**

赋范空间 $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$，$T: X \to Y$ 是线性映射，$T$ 有界 $\Leftrightarrow$ $T$ 连续 $\Leftrightarrow$ $T$ 在 0 处连续。

**证明** 有界 $\Rightarrow$ 连续：

$$||x_n - x||_X \to 0 \Rightarrow ||Tx_a - Tx|| \leqslant C||x_n - x|| \to 0$$

在 0 处连续 $\Rightarrow$ 有界：假设 $T$ 在 0 连续，但无界，则

$$\forall n, \exists x_n \in X \text{ s.t. } ||Tx_n||_Y > n||x_n||_X$$

令 $y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{||x_n||_X}$，则 $y_n \to 0$ 但 $|Ty_n|_Y \geqslant 1, \forall n$，这与 $T$ 在 0 处连续矛盾。

**定理 2.1.2**

有限维赋范空间之间的线性算子一定有界。

**证明** 先假设 $X = \mathbb{K}^n$，$Y = \mathbb{K}^m$，则

$$Tx = Ax \text{ for some } A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow ||Tx||_{\mathbb{K}^m} &= \left(\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{C-S}}{\leqslant} \left[\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} ||x||_{\mathbb{K}^n}
\end{aligned}$$

一般情形：把 $X$ 和 $Y$ 同胚到一个有限维线性空间即可：

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
\varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathbb{K}^m
\end{array}$$

$T = \psi^{-1} \circ \tilde{T} \circ \varphi$.

**命题 2.1.1**

证明：$\dim X < \infty$，$T: X \to Y$ 是线性算子，则 $T$ 有界。（作业）

**证明** 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $X$ 上的一组 Hamel 基，记 $M = \max\{||Te_1||_Y, \cdots, ||Te_n||_Y\}$，那么 $\forall x \in X$，$x =$

$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, x_i \in \mathbb{K}$，

$$\begin{aligned}||Tx||_Y &= ||x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(x_n)||_Y \\ &\leqslant |x_1| \cdot ||T(e_1)||_Y + \cdots + |x_n| \cdot ||T(e_n)||_Y \\ &\leqslant M(|x_1| + \cdots + |x_n|)\end{aligned}$$

由于有限维线性空间上范数都等价，不妨 $||x||_X \overset{\text{def}}{=} |x_1| + \cdots + |x_n|$，则 $||Tx||_Y \leqslant M||x||_X$，$T$ 有界。

**例 2.1.4. 无界算子的例子**

$X = C^1[0,1]$，$Y = C[0,1]$，赋以一致范数，$T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，设

$$u_n(t) = t^n, t \in [0,1], n = 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow ||u_n|| = 1, ||Tu_n|| = n \\ &\Rightarrow \frac{||Tu_n||}{||u_n||} \to \infty \\ &\Rightarrow T\text{无界}\end{aligned}$$

### 2.1.2 算子范数

**定义 2.1.3**

$X$ 到 $Y$ 的有界线性算子全体记作 $\mathcal{L}(X,Y)$，对于 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$，

$$||T||_{X\to Y} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup_{\substack{x\in X \\ ||x||=1}} ||Tx||_Y$$

称为 $T$ 的算子范数。

**例 2.1.5.**

Hilbert 空间 $X$ 的一个闭子空间为 $M$，正交投影 $P_M : X \to M$ 有 $||P_M||_{X\to M} = 1$.

**定理 2.1.3**

$(X, ||\cdot||_X)$，$(Y, ||\cdot||_Y)$，$(\mathcal{L}(X,Y), ||\cdot||_{X\to Y})$ 是赋范空间。进而如果 $Y$ 是 Banach 空间，则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是 Banach 空间。特别地，$X^* \overset{\text{def}}{=} \{X\text{上全体有界线性泛函}\}$ 是 Banach 空间。

**证明** 取 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上的柯西列 $\{f_n\}$，

$$||f_n - f_m|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \sup_{||x||=1} ||f_n(x) - f_m(x)|| \leqslant \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall ||x|| = 1, \{f_n(x)\}\text{是 } Y \text{ 上的柯西列}$$

于是定义：

$$f : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$f$ 显然是线性映射，

$$||f_n - f|| = \sup_{||x||=1} ||f_n(x) - f(x)|| \to 0$$

现只需证明 $||f||$ 有界：$\{f_n\}$ 作为柯西列是有界的，不妨 $||f_n|| \leqslant M$，则

$$||f|| = \sup_{||x||=1} ||f(x)|| = \sup_{||x||=1} \lim_{n\to\infty} ||f_n(x)|| \leqslant \sup_{||x||=1} \liminf_{n\to\infty} ||f_n|| \leqslant M < +\infty$$

所以 $f$ 有界。

## 2.2 Riesz 表示定理

设 $H$ 是 Hilbert 空间，给定 $y \in H$，定义 $f_y : H \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle x, y\rangle$，则由 C-S 不等式：$|f_y(x)| \leqslant ||y||||x||$，于是 $f_y \in H^*$ 且 $||f_y||| \leqslant ||y||$.

问：是否 $\forall f \in H^*$，$f(x) = \langle x, y\rangle$ for some $y \in H$？

**定理 2.2.1 (Riesz 表示定理)**

$H$ 是 Hilbert 空间，$\forall f \in H^*$，存在唯一 $y_f \in H$ 使得

$$f(x) = \langle x, y_f\rangle, x \in H$$

且 $||y_f|| = ||f||$.

**证明** 分析：$\mathbb{R}^n$ 上的线性代数 $l(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \langle x, a\rangle$，如果 $f(x) = \langle x, y\rangle, f(x) = 0 \Rightarrow y \perp x \Rightarrow y \perp \mathrm{Ker}(f)$.

存在性：如果 $f = 0 \Rightarrow y_f = 0$，下设 $f \neq 0$，于是 $\mathrm{Ker}(f) \neq H$，且是闭子空间，因为 $f \in H^*$. 于是存在 $y_0 \in \mathrm{Ker}(f)^\perp$ with $||y_0|| = 1$.

$$\begin{aligned}\forall x \in H, f\left(x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0\right) = 0 &\Rightarrow x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0 \in \mathrm{Ker}(f)\\ &\Rightarrow \left\langle x - \frac{f(x)}{f(y_0)}y_0, y_0\right\rangle = 0\\ &\Rightarrow \langle x, y_0\rangle - \frac{f(x)}{f(y_0)}||y_0||^2 = 0\\ &\Rightarrow f(x) = \left\langle x, \overline{f(y_0)}y_0\right\rangle\end{aligned}$$

设 $y_f = \overline{f(y_0)}y_0$ 即可。

唯一性：设 $y, \zeta \in H$ 使得

$$f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, \zeta\rangle, x \in H$$

于是 $\forall x \in H$，$\langle x, y - \zeta\rangle = 0 \Rightarrow y - \zeta = 0$.

一方面，

$$||f(x)|| = ||\langle x, y_f\rangle|| \leqslant ||x|| \cdot ||y_f|| \Rightarrow ||f|| \leqslant ||y_f||$$

另一方面由 $||y_0|| = 1$，

$$||y_f|| = ||f(y_0)|| \leqslant ||f||$$

所以 $||f|| = ||y_f||$.

**定理 2.2.2**

$H$ 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是 $H$ 上的共轭双线性函数，如果存在 $C > 0$ 使得

$$|a(x, y)| \leqslant C||x||||y||, \forall x, y \in H$$

则存在 $A \in \mathcal{L}(H)$，使得

$$a(x, y) = \langle x, Ay\rangle, x \in H$$

且

$$||A|| = \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|a(x,y)|}{||x||||y||}$$

**证明** $y \in H$，定义

$$f_y(x) = a(x,y), x \in H$$

于是 $f_y \in H^*$ 且 $||f_y|| \leqslant C||y||$，由 Riesz，存在唯一 $\zeta \in H$ 使得 $f_y(x) = \langle x, \zeta \rangle, x \in H$，定义 $A : H \to H, y \mapsto \zeta$，则

$$a(x,y) = f_y(x) = \langle x, \zeta \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

1. $A$ 是线性映射；
2. $\forall y \in H$，$||Ay|| = ||\zeta|| = ||f_y|| \leqslant C||y||$，于是 $A \in \mathcal{L}(H)$ 且 $||A|| \leqslant C$，由 $C$ 的任意性可得
$$||A|| \leqslant \sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|a(x,y)|}{||x||||y||}$$
另一方面，
$$|a(x,y)| = |\langle x, Ay \rangle| \leqslant ||x||||Ay|| \leqslant ||A||||x||||y||, \forall x, y \in H$$
于是
$$\sup_{0 \neq x, y \in H} \frac{|a(x,y)|}{||x||||y||} \geqslant ||A||$$

## 2.3 Baire 纲定理

### 定理内容

**定义 2.3.1**

$(X,d)$ 为度量空间，$E \subset X$，如果 $\overline{E}$ 没有内点，则称 $E$ 疏（朗）或无处稠密。

**例 2.3.1.**

$\mathbb{R}$ 中，Cantor 三分集是无处稠密集。

**定义 2.3.2**

第一纲集，又称贫集、瘦集：可数个无处稠密集之并；

第二纲集：不是第一纲集的集合；

剩余集：第一纲集的余集。

**例 2.3.2.**

可数集是第一纲集。

**引理 2.3.1 (闭球套)**

设 $(X,d)$ 完备，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一列闭球，使得

1. $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$
2. $\mathrm{diam} B_n \to 0$

则存在唯一 $x \in X$ 使得

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$$

**证明** 存在性：设 $B_n = \overline{B(x_n, r_n)}$，

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant m, x_n \in B_n \subset B_m \Rightarrow & d(x_n, x_m) \leqslant r_m \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\
\Rightarrow & \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\text{是基本列} \\
\overset{X\text{完备}}{\Rightarrow} & \exists x \in X \text{ s.t. } d(x_n, x) \to 0 \text{ as } n \to \infty \\
\overset{B_n\text{闭}}{\Rightarrow} & x \in B_n, n = 1, 2, \cdots \\
\Rightarrow & x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n
\end{aligned}$$

唯一性：如果 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，则

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y) \leqslant 2r_n \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

于是 $y = x$.

**定理 2.3.1 (Baire Category Theorem 1，BCT1)** 完备度量空间是第二纲集。

**证明** 假设 $(X, d)$ 完备，是第一纲集，则 $X$ 可以被表示成可数个无处稠密集之并，设为

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

任取 $B(x_0, r_0)$，

$$\begin{aligned}
E_1\text{疏} \Rightarrow & \overline{E_1}\text{无内点} \\
\Rightarrow & \exists x_1 \in B(x_0, r_0) \backslash \overline{E_1} \\
\Rightarrow & \operatorname{dist}(x_1, \overline{E_1}) > 0 \\
\Rightarrow & \exists B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0), r_1 < 1 \text{ s.t. } \overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \varnothing
\end{aligned}$$

对 $E_2$ 做同样的操作，

$$\exists B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1), r_2 < \frac{1}{2} \text{ s.t. } \overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \varnothing$$

以此类推，

$$\exists B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}), r_n < \frac{1}{n} \text{ s.t. } \overline{B(x_n, r_n)} \cap \overline{E_n} = \varnothing$$

由闭球套引理，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)} = \{x\}$$

另一方面，由于 $\forall n, \overline{B(x_n, r_n)} \cap \overline{E_n} = \varnothing$，故 $\forall n, x \notin \overline{E_n}$，进而

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} = X$$

矛盾。

**定理 2.3.2 (Baire Category Theorem 2，BCT2)**

$(X,d)$ 是完备度量空间，$\{U_n\}$ 是一列开集，且满足 $\overline{U_n}=X$，则

$$\overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)}=X$$

**证明** 设 $B_0$ 是 $X$ 上的任一非空开集，$U_1$ 稠密 $\Rightarrow \exists x_0\in U_1\cap B_0$，因为 $U_1\cap B_0$ 是开集，所以存在 $x_0$ 的邻域 $B_1$ 满足 $\overline{B_1}\subset U_1\cap B_0$. 又因为 $U_2$ 稠密，类似地存在 $B_2$ 满足 $\overline{B_2}\subset U_2\cap B_1$，以此类推可得一列开集 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足

$$\overline{B_n}\subset U_n\cap B_{n-1}$$

不妨令 $B_n$ 为半径小于 $\frac{1}{n}$ 的开球，根据闭球套定理可知

$$K=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\neq\varnothing$$

根据构造过程可得 $K\subset B_0$，$K\subset U_n$，从而 $B_0$ 与 $\cap_{n=1}^{\infty}U_n$ 相交，所以 $\cap_{n=1}^{\infty}U_n$ 也是稠密的。

## 应用和推论

**例 2.3.3.**

$l^2$ 的 Hamel 基是不可数集。(把 $l^2$ 换成任一无穷维 Banach 空间也可以。)

**证明** 假设 $l^2$ 的 Hamel 基 $B$ 可数，设 $B=\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$，设 $A_n=\text{span}\{x_1,\cdots,x_n\}$，则 $A_n$ 闭且 $l^2=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. 由 BCT，存在 $n_0$ 使得 $A_{n_0}$ 有内点，那么

$$\begin{aligned}&\exists B(x_0,r)\subset A_{n_0}\\ \Rightarrow& B(0,r)=B(x_0,r)-x_0\subset A_{n_0}\\ \Rightarrow&\forall 0\neq x\in l^2,\frac{r}{2}\cdot\frac{x}{||x||}\in B(0,r)\subset A_{n_0}\\ \Rightarrow& x\in A_{n_0}\end{aligned}$$

**定理 2.3.3 (Banach, 1931)**

$C[0,1]$ 中处处不可微函数全体是一个剩余集，从而是第二纲集。

**证明** 记 $X=C[0,1]$，$E=\{f\in C[0,1]:f\text{处处不可微}\}$，于是 $X\backslash E=\{f\in C[0,1]:f\text{至少在某一点可微}\}$. 令

$$A_n=\left\{f\in X:\exists t\in(0,1)\text{ s.t.}\sup_{h\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{a}),t+h\in[0,1]}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\leqslant n\right\}$$

于是 $\forall f\in X\backslash E$，存在 $n$ 使得 $f\in A_n$，所以

$$X\backslash E=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$$

约化为证明每个 $A_n$ 疏。

**Step1:** 每个 $A_n$ 都是闭集。设一列 $f_k\in A_n$，$f_k$ 一致收敛到 $f$，对于每个 $k$ 存在 $t_k\in(0,1)$ 使得

$$|f_k(t_k+h)-f_k(t_k)|\leqslant n|h|,\forall h\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\text{ with }t_k+h\in[0,1]$$

$\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列，不妨设 $t_k\to t_0$，由 $f_k\rightrightarrows f$，

$$|f(t_0+h)-f(t_0)|\leqslant n|h|,\forall h\in(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\text{ with }t_k+h\in[0,1]$$

于是 $f\in A_n$.

**Step2:**$A_n$ 无内点，即：$\forall f \in A_n$，$\forall \varepsilon > 0$，$B(f,\varepsilon) \not\subseteq A_n$. 首先，by Weierstrass，

$$\exists p \in P[0,1] \text{ s.t. } ||f-p|| < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |p'(t)|$，则 $M < \infty$ 且

$$|p(t+h)-p(t)| \leqslant M|h|, \forall t \in (0,1), \forall h \text{ with } t+h \in (0,1)$$

取分段仿射的连续函数 $g$，使得

1. $||g|| < \frac{\varepsilon}{2}$
2. 各段斜率的绝对值 $> M+n$

则 $p+g \in B(f,\varepsilon)$，但 $p+g \notin A_n$，因为

$$|(p+g)'(t)| \geqslant |g'(t)| - |p'(t)| > n$$

## 2.4 共鸣定理

### 定理内容

**定理 2.4.1 (一致有界原理，共鸣定理，UBP)**

$X$ 是 Banach 空间，$Y$ 是赋范空间，$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X,Y)$，

$$\forall x \in X, \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| < \infty \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{F}} ||T|| < \infty$$

等价地，

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} ||T|| = +\infty \Rightarrow \exists x_0 \in X \text{ s.t. } \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx_0|| = +\infty$$

**证明** 令

$$F_n = \{x \in X : \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| \leqslant n\} = \bigcap_{T\in\mathcal{F}} \{x \in X : ||Tx|| \leqslant n\}$$

因为 $T$ 连续，$\{x \in X : ||Tx|| \leqslant n\}$ 是闭集，进而 $F_n$ 是闭集，

$$\begin{aligned}
\forall x \in X, \sup_{T\in\mathcal{F}} ||Tx|| < \infty \Rightarrow & X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \\
& \overset{\text{BCT1}}{\Rightarrow} \exists n_0 \text{ s.t. } F_{n_0} \text{有内点} \\
& \Rightarrow \exists B(x_0,r) \subset F_{n_0} \\
& \Rightarrow ||T(x_0+rx)|| \leqslant n_0, \forall x \in B(0,1), \forall T \in \mathcal{F} \\
& \Rightarrow ||T(rx)|| \leqslant n_0 + ||Tx_0|| \leqslant 2n_0 \\
& \Rightarrow ||Tx|| \leqslant \frac{2n_0}{r}, \forall x \in B(0,1), \forall T \in \mathcal{F} \\
& \Rightarrow \sup_{T\in\mathcal{F}} \sup_{x\in X, ||x||\leqslant 1} ||Tx|| \leqslant \frac{2n_0}{r}
\end{aligned}$$

### 应用和推论

**定理 2.4.2 (Banach-Steinhaus)**

$X$ 是 Banach 空间，$Y$ 是赋范空间，$\overline{M} = X$，$T, T_n \in \mathcal{L}(X,Y), n = 1,2,\cdots$

$$T_n x \to T_x, \forall x \in X \Leftrightarrow \sup_n ||T_n|| < \infty \text{ and } T_n x \to Tx, \forall x \in M$$

**证明** 必要性：逐点收敛 $\Rightarrow$ 逐点有界 $\overset{\text{UBP}}{\Rightarrow}$ 一致有界。

充分性：记 $C=\sup\limits_{n}||T_n||$，

$$\begin{aligned}\overline{M}=X\Rightarrow&\forall x\in X,\forall\varepsilon>0,\exists y\in M\text{ s.t. }||x-y||<\frac{\varepsilon}{4(||T||+C)}\\ \Rightarrow&||T_nx-Tx||\leqslant\underbrace{||T_nx-T_ny||}_{\leqslant C||x-y||}+\underbrace{||T_ny-Ty||}_{<\frac{\varepsilon}{2},n\text{充分大}}+\underbrace{||T_y-Tx||}_{\leqslant||T||||x-y||}\end{aligned}$$

**定理 2.4.3**

$X,Y$ 是 Banach 空间，$T_n\in\mathcal{L}(X,Y),n=1,2,\cdots$，如果 $\forall x\in X$，$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$ 存在，定义 $T:X\to Y,X\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$，则 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$，且

$$||T||\leqslant\liminf_{n\to\infty}||T_n||$$

**证明** 见习题 2.3.7.

我们设

$$S_N(f)(x)=\sum_{k=-N}^{N}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{2\pi ikx}$$

问：是否 $\forall f\in C(\Pi)$，$S_N(f)(x)\to f(x),\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$?

**定理 2.4.4 (Du Bois-Reymond,1876)**

$\exists f\in C(\Pi)$ s.t. $S_N(f)(0)$ 发散。

**证明**

$$S_N(f)(x)=(f*D_N)(x)$$

其中

$$D_N(t)\overset{\text{def}}{=}\frac{\sin\left[(2N+1)\pi t\right]}{\sin(\pi t)}$$

定义 $T_N:C(\Pi)\to\mathbb{R},f\mapsto S_N(f)(0)$，

$$\begin{aligned}\Rightarrow&|T_N(f)|=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t)D_N(-t)\mathrm{d}t\right|\leqslant||D_N||_1\cdot||f||\\ \Rightarrow&T_N\in C(\Pi)^*,||T_N||\leqslant||D_N||_1\end{aligned}$$

Claim：$||T_N||=||D_N||_1$. 因为 $D_N$ 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上只有有限多个零点，故 $\operatorname{sgn}D_N$ 只有有限个间断点。$\forall\varepsilon>0$，存在 $f_\varepsilon\in C(\Pi)$，分段仿射使得

1. $||f_\varepsilon||=1$.
2. $f_\varepsilon=\operatorname{sgn}D_N$ on $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\backslash I_\varepsilon$ with $|I_\varepsilon|<\frac{\varepsilon}{4N+3}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow|T_N(f_\varepsilon)|=&\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f_\varepsilon(t)D_N(t)\mathrm{d}t\right|\\ \geqslant&\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\backslash I_\varepsilon}|D_N(t)|\mathrm{d}t-\int_{I_\varepsilon}|D_N(t)|\mathrm{d}t\\ \geqslant&||D_N||_1-2\int_{I_\varepsilon}|D_N(t)|\mathrm{d}t\\ >&||D_N||_1-\varepsilon\\ \Rightarrow||T_N||\geqslant&\frac{|T_N(f_\varepsilon)|}{||f_\varepsilon||}>||D_N||_1-\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 则 Claim 得证，而

$$\begin{aligned}
||D_N||_1 =& 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}\right| \mathrm{d}t \\
\geqslant& 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}\right| \mathrm{d}t \\
\overset{x=(2N+1)\pi t}{=}& \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}(2N+1)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \to \infty \text{ as } N \to \infty
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\text{Claim} \Rightarrow& \sup_N ||T_N|| = +\infty \\
\overset{\text{UBP}}{\Rightarrow}& \exists f \in C(\Pi) \text{ s.t. } \sup_N |T_N(f)| = +\infty \\
\Rightarrow& \limsup_{N\to\infty} |S_N(f)(0)| = +\infty \\
\Rightarrow& \{S_N(f)(0)\}_{N=1}^{\infty} \text{发散}
\end{aligned}$$

## 2.5 开映射定理

方程 $Tx = y$，当 $y$ 变化很小时 $x$ 是不是变化很小（解的稳定性）？这就要考虑 $T^{-1}$ 的连续性。

### 定理内容

**定义 2.5.1**

将任意开集都映为开集的映射，称为开映射。

**定理 2.5.1 (开映射定理，OMT)**

$X, Y$ 是 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$，则 $T$ 是满射 $\Rightarrow T$ 是开映射。

**引理 2.5.1**

$X, Y$ 是 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$，如果 $T$ 满射，则 $\exists \delta > 0$ s.t. $\delta B_Y \subset T(B_X)$.

证明 **Step1**：$\exists r > 0$ s.t. $rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$，

$$\begin{aligned}
X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_X \overset{T\text{满}}{\Rightarrow}& Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nB_X) \\
\Rightarrow& Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(nB_X)} \\
\overset{\text{BCT}}{\Rightarrow}& \exists n_0 \text{ s.t. } \overline{T(n_0 B_X)} \text{有内点} \\
\Rightarrow& \exists B_Y(y_0, t) \subset \overline{T(n_0 B_X)}
\end{aligned}$$

令 $r \overset{\text{def}}{=} t/n_0$，Claim：$rB_y \subset \overline{T(B_X)}$.

$$\begin{aligned}
\forall y \in rB_Y, y_0 \pm n_0 y \in B_Y(y_0, t) \subset \overline{T(n_0 B_X)} \Rightarrow& \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \subset n_0 B_X \text{ s.t.} \\
& Tx_n \to y_0 + n_0 y, Tx_n' \to y_0 - n_0 y \\
\Rightarrow& T\left(\frac{x_n - x_n'}{2n_0}\right) \to y \\
\Rightarrow& y \in \overline{T(B_X)}
\end{aligned}$$

**Step2:** 令 $\delta \overset{\text{def}}{=} r/3$，则 $\delta B_Y \subset T(B_X)$，即

$$\forall y \in \delta B_Y, \exists x \in B_X \text{ s.t. } Tx = y$$

$$\begin{aligned}\text{Step1} \Rightarrow &\forall y \in \delta B_Y, 3y \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)} \\ \Rightarrow &\exists \tilde{x}_1 \in B_X \text{ s.t. } ||3y - T\tilde{x}_1||_Y < \delta\end{aligned}$$

令 $x_1 \overset{\text{def}}{=} \tilde{x}_1/3$，则 $||y - Tx_1||_Y < \delta/3$. 令 $y_1 \overset{\text{def}}{=} y - Tx_1$，则

$$\begin{aligned}
y_1 \in \frac{\delta}{3}B_Y \Rightarrow & 9y_1 \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)} \\
\Rightarrow & \exists x_2 \in \frac{1}{3^2}B_X \text{ s.t. } ||y_1 - Tx_2||_Y < \frac{\delta}{3^2} \\
& \vdots \\
& y_n \overset{\text{def}}{=} y_{n-1} - Tx_n \in \frac{\delta}{3^n}B_Y \\
& \exists x_{n+1} \in \frac{1}{3^{n+1}}B_X \text{ s.t. } ||y_n - Tx_{n+1}||_Y < \frac{\delta}{3^{n+1}} \\
\Rightarrow & \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\|_X < \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{2^n} \\
\Rightarrow & \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ 是} X \text{中的基本列} \\
\overset{X\ Banach}{\Rightarrow} & \exists x \in X \text{ s.t. } \sum_{k=1}^{n} x_k \to x \text{ and } ||x||_X \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^{N} x_k\right\|_X + \left\|\sum_{k=1}^{N} x_k\right\|_X < 1 \\
\Rightarrow & x \in B_X \text{ and } \frac{\delta}{3^n} > ||y_n||_Y = ||y_{n-1} - Tx_n||_Y = \cdots = ||y - T(x_1 + \cdots + x_n)||_Y \\
\Rightarrow & T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \to y \\
\Rightarrow & Tx = y
\end{aligned}$$

**证明** 设 $U$ 是 $X$ 上的开集，$\forall y \in T(U)$，$\exists x \in U$ s.t. $Tx = y$，令 $V \overset{\text{def}}{=} U - x$，

$$\begin{aligned}
0 \in V \overset{\text{open}}{\subset} X \Rightarrow & \exists t > 0 \text{ s.t. } tB_X \subset V \\
\overset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} & \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \delta B_Y \subset T(B_X) \subset \frac{1}{t}T(V) \\
\Rightarrow & 0 \text{是 } T(V) \text{ 的内点} \\
T(U) = T(V) + Tx \Rightarrow & y = Tx \text{是 } T(U) \text{ 的内点}
\end{aligned}$$

**定理 2.5.2 (逆算子定理，IMT)**

$X, Y$ 是 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$，则 $T$ 是双射 $\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

**证明** $f: X \to Y$ 连续 $\Leftrightarrow \forall$ 开集 $U \subset Y, f^{-1}(U)$ 是 $X$ 上的开集。

$T^{-1}: Y \to X$ 连续 $\Leftrightarrow \forall$ 开集 $U \subset X$，由 OMT，$(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ 是 $Y$ 上的开集。

## 应用和推论

**定理 2.5.3 (Lax-Milgram)**

$H$ 是 Hilbert 空间，如果共轭双线性函数 $a(\cdot,\cdot)$ 满足

1. 连续：$\exists C>0$ 使得 $|a(x,y)|\leqslant C||x||||y||,\forall x,y\in H$.
2. 强制 (coersive)：$\exists\delta>0$ 使得 $\delta||x||^2\leqslant a(x,x),\forall x\in H$.

则存在唯一 $A\in\mathcal{L}(H)$ 使得

$1^\circ$ $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle,x,y\in H$.

$2^\circ$ $A^{-1}$ 存在、有界且 $||A^{-1}||\leqslant\frac{1}{\delta}$.

**证明** Claim1：$A$ 是双射：

(1). $A$ 是单射：对于线性映射而言，单射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(A)=A^{-1}(\{0\})=\{0\}$.

$$\begin{aligned}Ay=0\Rightarrow&a(x,y)=\langle x,Ay\rangle=0,\forall x\in H\\\Rightarrow&0=a(y,y)\geqslant\delta||y||^2\\\Rightarrow&y=0\end{aligned}$$

(2). $A$ 是满射：先证明 $\mathrm{Ran}(A)$ 闭，设 $\mathrm{Ran}(A)\ni Ax_n\to y$，

$$\begin{aligned}&\delta||x_n-x_m||^2\leqslant a(x_n-x_m,x_n-x_m)=\langle x_n-x_m,Ax_n-Ax_m\rangle\leqslant||x_n-x_m||\cdot||Ax_n-Ax_m||\\\Rightarrow&||x_n-x_m||\leqslant\frac{1}{\delta}||Ax_n-Ax_m||\to0\text{ as }n,m\to\infty\\\Rightarrow&\{x_n\}_{n=1}^\infty\text{是基本列}\end{aligned}$$

设 $x_n\to x\in H$,$A$ 连续所以 $Ax_n\to Ax$,而 $Ax_n\to y$,所以 $y=Ax\in\mathrm{Ran}(A)$,那么 $H=\mathrm{Ran}(A)\oplus\mathrm{Ran}(A)^\perp$. 为了证明 $A$ 满射，只需证明 $\mathrm{Ran}(A)^\perp=\{0\}$，

$$y\in\mathrm{Ran}(A)^\perp\Rightarrow\langle y,Ax\rangle=a(y,x)=0,\forall x\in H$$

特别地，考虑 $x=y$，则 $0=a(y,y)\geqslant\delta||y||^2\Rightarrow y=0$.

那么由 IMT，$A^{-1}\in\mathcal{L}(H)$，

$$\begin{aligned}\delta||x||^2\leqslant a(x,x)=\langle x,Ax\rangle\leqslant||x||\cdot||Ax||\Rightarrow&||x||\leqslant\frac{1}{\delta}||Ax||,\forall x\in H\\\Rightarrow&||A^{-1}y||\leqslant\frac{1}{\delta}||y||,\forall y\in H\\\Rightarrow&||A^{-1}||\leqslant\frac{1}{\delta}\end{aligned}$$

**定理 2.5.4 (等价范数定理)**

$(X,||\cdot||_1),(X,||\cdot||_2)$ 都是 Banach 空间，则 $||\cdot||_2\lesssim||\cdot||_1\Rightarrow||\cdot||_1\cong||\cdot||_2$.

**证明** 考虑恒等映射 $I:(X,||\cdot||_1)\to(X,||\cdot||_2),x\mapsto x$.

$$\begin{aligned}\exists C>0\text{ s.t. }||x||_2\leqslant C\,||x||_1\,,\forall x\in X\Rightarrow&\frac{||I(x)||_2}{||x||_1}\leqslant C\\\Rightarrow&I\in\mathcal{L}((X,||\cdot||_1),(X,||\cdot||_2))\\\overset{\mathrm{IMT}}{\Rightarrow}&I^{-1}\in\mathcal{L}((X,||\cdot||_1),(X,||\cdot||_2))\\\Rightarrow&\exists C'>0\text{ s.t. }||x||_1\leqslant C'\,||x||_2\,,\forall x\in X\\\Rightarrow&\frac{1}{C'}\,||x||_1\leqslant||x||_2\leqslant C\,||x||_1\,,\forall x\in X\end{aligned}$$

## 2.6 闭图像定理

**定义 2.6.1 (乘积度量空间)**

$(X,||\cdot||_X),(Y,||\cdot||_Y)$ 是两个度量空间，定义：

$$||(x,y)||_{X\times Y} \overset{\text{def}}{=} ||x||_X + ||y||_Y$$

可以证明，$(X\times Y,||\cdot||_{X\times Y})$ 构成一个新的度量空间，称为乘积空间。

**推论 2.6.1**

$X,Y$ 都是 Banach 空间，则其乘积空间 $X\times Y$ 也是 Banach 空间。

**定义 2.6.2 (闭算子)**

$T:X\to Y$ 是线性映射，

$$\mathrm{Gr}(T)\overset{\text{def}}{=}\{(x,Tx):x\in\mathrm{Dom}(T)\}$$

称为 $T$ 的图像，其中 $\mathrm{Dom}(T)\subset X$ 是指 $T$ 的定义域，为 $X$ 的子集.

如果 $\mathrm{Gr}(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子空间，则称 $T$ 是闭算子。

**引理 2.6.1**

$T$ 是闭算子当且仅当

$$\mathrm{Dom(T)}\ni x_n\to x, Tx_n\to y$$

蕴含 (imply)

$$x\in\mathrm{Dom}(T), y=Tx$$

即，如果 $T$ 将 $\mathrm{Dom}(T)$ 上的收敛列 $\{x_n\}$ 映为收敛列 $\{y_n=Tx_n\}$，则收敛列 $\{x_n\}$ 的极限 $x\in\mathrm{Dom}(T)$ 且收敛列 $\{y_n=Tx_n\}$ 的极限为 $y=Tx$.

**证明** $\mathrm{Gr}(T)$ 闭当且仅当：

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)\Rightarrow(x,y)\in G_r(T)$$

**注** $\mathrm{Dom}(T)$ 不一定是闭集。

**例 2.6.1. 无界的闭算子**

$$T=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}:C[0,1]\to C[0,1],\ \mathrm{Dom}(T)=C^1[0,1]$$

**命题 2.6.1**

$A$ 有界，$D=\mathrm{Dom}(A)$ 闭，则 $A$ 闭。

**证明** 设 $\{x_n\}\subset D$ 收敛到 $x$，$Ax_n\to y$，则 $D$ 闭 $\Rightarrow x\in D$，$A$ 连续 $\Rightarrow Ax_n\to Ax$，所以 $Ax=y$，$A$ 是闭算子。

## 定理内容

**定理 2.6.1 (B.L.T.)**

$X$ 是赋范空间，$Y$ 是 Banach 空间，任一 $T \in \mathcal{L}(\mathrm{Dom}(T), Y)$ 可唯一地、保范数地延拓为 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y)$. 即

$$\tilde{T}|_{\mathrm{Dom}(T)} = T \text{ and } ||\tilde{T}|| = ||T||.$$

**证明**

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}, \exists x_n \in \mathrm{Dom}(T), n = 1, 2, \cdots \text{ s.t. } x_n \to x \\
&\overset{T\text{有界}}{\Rightarrow} ||Tx_n - Tx_m|| \leqslant ||T||||x_n - x_m|| \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\
&\Rightarrow \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty} \text{是 } Y \text{ 中的基本列} \\
&\overset{Y \text{ Banach}}{\Rightarrow} \exists y \in Y \text{ s.t. } Tx_n \to y
\end{aligned}$$

定义映射

$$\tilde{T} : \overline{\mathrm{Dom}(T)} \to Y, x \mapsto y$$

容易验证良定，且 $\tilde{T}$ 是线性映射。下面证明 $\tilde{T}$ 有界：

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \overline{\mathrm{Dom}(T)}, ||\tilde{T}x|| = ||y|| = \lim_{n\to\infty} ||Tx_n|| \leqslant \lim_{n\to\infty} ||T||||x_n|| = ||T||||x|| \\
&\Rightarrow \tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)}, Y) \text{ and } ||\tilde{T}|| \leqslant ||T||
\end{aligned}$$

另一方面，平凡地，$||\tilde{T}|| \geqslant ||T||$.

**例 2.6.2. Fourier 变换**

$$\hat{f}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{d}x$$

其中 $f \in L^1$，如何在 $L^2$ 上定义？

$L^1 \cap L^2$ 在 $L^2$ 上稠密，$||\hat{f}||_2 = ||f||_2, \forall f \in L^1 \cap L^2$(Planchered)，由 B.L.T. 可得 $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ 可唯一地、保范数地延拓到 $L^2$ 上。

**注** 由 B.L.T 和命题 2.6.1，有界算子可以将其定义域延拓为闭集，从而成为闭算子。

**定理 2.6.2 (闭图像定理，CGT)**

$X, Y$ 是 Banach 空间，$T : X \to Y$ 是闭线性算子，如果 $\mathrm{Dom}(T)$ 是闭集，则 $T$ 有界。

**证明** $\mathrm{Gr}(T)$ 是 $X \times Y$ 的闭子空间，所以 $(\mathrm{Gr}(T), ||\cdot||_{X\times Y})$ 是 Banach 空间，定义：

$$\Pi_1 : \mathrm{Gr}(T) \to \mathrm{Dom}(T),\ (x, Tx) \mapsto x$$

$$\Pi_2 : \mathrm{Gr}(T) \to Y,\ (x, Tx) \mapsto Tx$$

并设 $T = \Pi_2 \prod \Pi_1^{-1}$，

$$\Pi_1\text{是双射} \underset{\mathrm{Dom}(T)\text{闭用在这里}}{\overset{\mathrm{IMT}}{\Longrightarrow}} \Pi^{-1}\text{有界} \Rightarrow T = \Pi_1 \circ \Pi_1^{-1}\text{有界}$$

**证明** $(\mathrm{Dom}(T), ||\cdot||_X)$ 是 Banach 空间，令

$$||x||_G \overset{\text{def}}{=} ||x||_X + ||Tx||_Y,\ x \in \mathrm{Dom}(T)$$

Claim：$(\mathrm{Dom}(T), ||\cdot||_G)$ 也是 Banach 空间。实际上，

$$||x_n - x_m||_G = ||x_n - x_m||_X + ||Tx_n - Tx_m||_Y \to 0 \text{ as } n, m \to \infty$$

$X, Y$ 是 Banach，所以存在 $x_n \to x, Tx_n \to y$，因为 $T$ 闭所以 $x \in \mathrm{Dom}(T), y = Tx$. 于是

$$||x_n - x||_G = ||x_n - x||_X + ||Tx_n - Tx||_Y \to 0$$

那么 $||\cdot||_X$ 弱于 $||\cdot||_G$，因此 $||\cdot||_X$ 等价于 $||\cdot||_G$，所以存在 $C > 0$ 使得

$$||Tx||_Y \leqslant ||x||_G \leqslant C||x||_X, \forall x \in \mathrm{Dom}(T)$$

### 应用和推论

**例 2.6.3. Hellinger-Toeplitz**

$H$ 是 Hilbert 空间，如果 $T : H \to H$ 满足 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \forall x, y \in H$，则 $T$ 有界。

**证明** 先证明 $T$ 闭：设 $x_n \to x$，$Tx_n \to y$，存在 $\delta \in H$ 使得

$$\langle \delta, Tx\rangle = \langle T\delta, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T\delta, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \delta, Tx_n\rangle = \langle \delta, y\rangle$$

所以 $Tx = y$. 于是由 CGT 可知 $T$ 有界。

## 2.7 Hahn-Banach 定理

### 2.7.1 代数形式——线性泛函的延拓

**定义 2.7.1**

$X$ 是向量空间，如果函数 $p : X \to \mathbb{R}$ 使得

1. 正齐性：$p(tx) = tp(x), \forall x \in X, t > 0$.
2. 次可加性：$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y), \forall x, y \in X$.

则称 $p$ 是 $X$ 上的一个次线性泛函。

如果 $p$ 还满足齐次性，即

$$p(\lambda x) = |\lambda|p(x), \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

则称 $p$ 是一个半范数。

**注**

1. 半范数非负：$\forall x \in X, 2p(x) = p(x) + p(-x) \geqslant p(0) = 0$.
2. 如果半范数 $p$ 满足 $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$，则 $p$ 是一个范数。

**定理 2.7.1 (HBT for real version)**

设 $X$ 为实向量空间，$p$ 是 $X$ 上次线性泛函，$M$ 是 $X$ 的子空间，$f$ 是 $M$ 上的线性泛函，并满足 $f(x) \leqslant p(x), \forall x \in M$. 则存在 $X$ 上的线性泛函 $F$ 满足

1. $F|_M = f$.
2. $F(x) \leqslant p(x), \forall x \in X$.

**引理 2.7.1**

在定理条件下，设 $x_0 \in X\backslash M$，定义

$$\tilde{M} \overset{\text{def}}{=} M \oplus \mathrm{span} x_0$$

则存在线性映射 $\tilde{f} : \tilde{M} \to \mathbb{R}$，满足

1. $\tilde{f}|_M = f$.

2. $\tilde{f}(x) \leqslant p(x), \forall x \in \tilde{M}$.

证明

$$\begin{aligned}
&\forall x, y \in M, f(x)+f(y)=f(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x-x_0)+p(y+x_0) \\
\Rightarrow & f(x)-p(x-x_0) \leqslant p(y+x_0)-f(y) \\
\Rightarrow & \sup_{x \in M}[f(x)-p(x-x_0)] \leqslant \inf_{y \in M}[p(y+x_0)-f(y)] \\
\Rightarrow & \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f(x)-p(x-x_0) \leqslant \beta \leqslant p(y+x_0)-f(y), \forall x, y \in M \qquad (*)
\end{aligned}$$

令

$$\tilde{f}: \tilde{M} \to \mathbb{R}, x+\lambda x_0 \mapsto f(x)+\lambda \beta$$

于是 $\tilde{f}$ 是线性映射，且 $\tilde{f}|_M = f$. 下面证明：

$$\tilde{f}(x+\lambda x_0) \leqslant p(x+\lambda x_0), \forall x \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\lambda=0$ 显然，$\lambda \neq 0$ 时，不妨设 $\lambda>0$，(*) 式中 $x, y$ 均代以 $\frac{x}{\lambda}$ 可得

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{x}{\lambda}\right)-p\left(\frac{x}{\lambda}-x_0\right) \leqslant \beta \leqslant p\left(\frac{x}{\lambda}+x_0\right)-f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\
\Rightarrow & f(x)-p(x-\lambda x_0) \leqslant \lambda \beta \leqslant p(x+\lambda x_0)-f(x) \\
\Rightarrow & \begin{cases} f(x)-\lambda \beta=\tilde{f}(x-\lambda x_0) \leqslant p(x-\lambda x_0) \\ f(x)+\lambda \beta=\tilde{f}(x+\lambda x_0) \leqslant p(x+\lambda x_0) \end{cases}
\end{aligned}$$

证明 对两个线性泛函 $g, h$，如果 $\mathrm{Dom}(g)$ 是 $\mathrm{Dom}(h)$ 的闭子空间，且 $h_{\mathrm{Dom}(g)} = g$，则称 $h$ 是 $g$ 的一个延拓。令

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{g : g\text{是}f\text{的延拓，}g(x) \leqslant p(x), \forall x \in \mathrm{Dom}(g)\}$$

引入偏序：

$$g \leqslant h \Leftrightarrow h\text{是}g\text{的延拓}$$

设 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{F}$ 的任一全序子集，令

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{g \in \mathcal{T}} \mathrm{Dom}(g)$$

于是 $Y$ 是 $X$ 的闭子空间，令

$$G: Y \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x) \text{ if } x \in \mathrm{Dom}(g)$$

$\mathcal{T}$ 全序 $\Rightarrow G$ 良定且是 $\mathcal{T}$ 的一个上界，由 Zorn 引理可得 $\mathcal{F}$ 有极大元 $F$，下面证明 $\mathrm{Dom}(F)=X$，从而 $F$ 即为所求。

假设不然，即存在 $x_0 \in X \backslash \mathrm{Dom}(F)$，那么由引理可得存在 $\mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$ 上的线性泛函 $\tilde{F}$，满足

1. $\tilde{F}|_{\mathrm{Dom}(F)} = F$.
2. $\tilde{F}(x) \leqslant p(x), \forall x \in \mathrm{Dom}(F) \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$.

于是 $\tilde{F} \in \mathcal{F}$ 且 $F \leqslant \tilde{F}$，这与 $F$ 的极大性矛盾。

**定理 2.7.2 (HBT for complex version)**

设 $X$ 为复向量空间，$p$ 是 $X$ 上次线性泛函，$M$ 是 $X$ 的子空间，$f: M \to \mathbb{C}$ 是 $M$ 上的线性泛函，并满足 $|f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in M$. 则存在 $X$ 上的线性泛函 $F: X \to \mathbb{C}$ 满足

1. $F|_M = f$.
2. $|F(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$.

**证明** **Step1**：先把 $X$ 看作实向量空间，令 $g \overset{\text{def}}{=} \text{Re}\, f$，则 $g$ 是 $M$ 上的实线性泛函，且满足

$$g(x) \leqslant |f(x)| \leqslant p(x), \forall x \in M$$

那么由实 HBT，存在线性映射 $G: X \to \mathbb{R}$，满足

1. $G|_M = g$.
2. $G(x) \leqslant p(x), \forall x \in X$.

**Step2**：复化。令

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x)$$

显然有

$$F(x+y) = F(x) + F(y)$$
$$F(\alpha x) = \alpha F(x), \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

所以

$$F((\alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2)x) = F(\alpha_1 x) + F(\mathrm{i}\alpha_2 x) = \alpha_1 F(x) + \alpha_2 F(\mathrm{i}x), \forall x \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

故只需证明 $F(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}F(x)$，

$$F(\mathrm{i}x) = G(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}G(-x) = G(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}G(x) = \mathrm{i}(-\mathrm{i}G(\mathrm{i}x) + G(x)) = \mathrm{i}F(x)$$

得证。

**Step3**：证明 $F|_M = f$.

$$\begin{aligned}\forall x \in M, F(x) &= G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x)\\ &= g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)\\ &= \text{Re}\, f(x) - \mathrm{i} \cdot \text{Re}\, f(\mathrm{i}x)\\ &= \text{Re}\, f(x) - \mathrm{i} \cdot \text{Re}\, \{\mathrm{i}f(x)\}\\ &= \text{Re}\, f(x) + \mathrm{i} \cdot \text{Im}\, f(x) = f(x)\end{aligned}$$

**Step4**：证明 $|F(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X$. $F(x) = 0$ 时显然，设 $F(x) \neq 0$，存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $|F(x)| = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(x)$，于是

$$|F(x)| = F(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = G(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = G(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) \leqslant p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x) = p(x)$$

**定理 2.7.3 (HBT)**

$X$ 为度量空间，$M$ 是其子空间，则

$$\forall f \in M^*, \exists F \in X^* \text{ s.t. } F|_M = f \text{ and } ||F|| = ||f||$$

这称为保范延拓。

**证明** 令

$$p(x) \overset{\text{def}}{=} ||f|| \cdot ||x||, x \in X$$

则 $|f(x)| \leqslant ||f|| \cdot ||x||$，由复 HBT 可得存在 $X$ 上线性泛函 $F: X \to \mathbb{C}$ 满足 $F|_M = f$ 且 $|F(x)| \leqslant p(x)$，进而 $|F(x)| \leqslant ||F|| \cdot ||x||$，因此 $F$ 是 $X$ 上有界线性泛函，且 $||F|| \leqslant ||f||$. 同时显然有 $||F|| \geqslant ||f||$.

**例 2.7.1. HBT 中延拓不唯一**

$X = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$，其中 $||(x_1, x_2)||_1 \overset{\text{def}}{=} |x_1| + |x_2|$，取 $M = \mathbb{R} \times \{0\}$，$f: M \to \mathbb{R}, (x, 0) \mapsto x$，那么 $f$ 是 $M$ 上有界线性泛函，且 $||f|| = 1$.

令

$$F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + tx_2$$

那么 $F_t|_M = f$，而且对于 $\forall t \in (-1, 1)$，

$$|F_t(x_1, x_2)| = |x_1 + tx_2| \leqslant |x_1| + |t||x_2| \leqslant ||(x_1, x_2)||_1 \Rightarrow ||F_t|| \leqslant 1$$

## 应用和推论

**推论 2.7.1**

$\forall x_0 \in X$，$\exists f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$ 且 $f(x_0) = ||x_0||$.

**证明** 令 $M \overset{\text{def}}{=} \text{span}\{x_0\}$，

$$f_0 : M \to \mathbb{K}, x = \lambda x_0 \mapsto \lambda ||x_0||$$

于是 $|f_0(x)| \leqslant |\lambda| \cdot ||x_0|| = ||x||$，进而 $f_0 \in M^*$ 且 $||f_0|| = 1$，由 HBT 可得存在 $f \in X^*$ 满足 $f|_M = f_0$，即 $f(x_0) = f_0(x_0) = ||x_0||$，同时 $||f|| = ||f_0|| = 1$.

**推论 2.7.2**

$X \neq \{0\} \Rightarrow X^* \neq \{0\}$.

**证明** 取 $0 \neq x \in X$，由推论 2.7.1 可得存在 $f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$ 且 $f(x) = ||x|| \neq 0$，此即为 $0 \neq f \in X^*$.

**推论 2.7.3**

$x, y \in X, x \neq y \Rightarrow \exists f \in X^* \text{ s.t. } f(x) \neq f(y)$.

**证明** 取 $x_0 = x - y \neq 0$，由推论 2.7.1 可得存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x - y) = ||x - y|| \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

**推论 2.7.4**

$f(x) = 0, \forall f \in X^* \Rightarrow x = 0$

**证明** 假设 $x \neq 0$，由推论 2.7.3 可得存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \neq f(0) = 0$，矛盾。

**推论 2.7.5**

$||x|| = \sup\limits_{f \in X^*, ||f||=1} |f(x)|$.

**证明** $\forall f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$，

$$|f(x)| \leqslant ||f|| \cdot ||x|| = ||x||$$

于是

$$\sup_{f \in X^*, ||f||=1} |f(x)| \leqslant ||x||$$

另一方面，存在 $f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$ 且 $f(x) = ||x||$，得证。

**定理 2.7.4**

$X$ 是度量空间，$M$ 是其子空间，$x_0 \in X$ 满足 $d = \text{dist}(x_0, M) > 0$，则存在 $f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$ 且

$$f(M) = \{0\}, f(x_0) = d$$

**证明** 令 $\tilde{M} \overset{\text{def}}{=} M \oplus \text{span}\{x_0\}$，定义

$$f_0 : \tilde{M} \to \mathbb{K}, x = y + \lambda x_0 \mapsto \lambda d$$

于是 $f_0(M) = \{0\}$ 且 $f(x_0) = d$，而且对于 $\forall x = y + \lambda x_0$，其中 $y \in M$，

1° 如果 $\lambda = 0$，则 $f_0(x) = 0$.

2° 如果 $\lambda \neq 0$，

$$|f_0(x)| = |\lambda d| = |\lambda| \cdot d \leqslant |\lambda| \cdot \left|\left|x_0 + \frac{y}{\lambda}\right|\right| = ||y + \lambda x_0|| = ||x||.$$

于是 $f_0 \in \tilde{M}^*$ 且 $||f_0|| = 1$，由 HBT 可得存在 $f \in X^*$ 满足 $f|_{\tilde{M}^*} = f_0$ 且 $||f|| = ||f_0|| \leqslant 1$，则 $f(M) = \{0\}, f(x_0) = d$.

只需证明 $||f|| \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} d = \inf_{y \in M} ||x_0 - y|| &\Rightarrow \forall n, \exists y_n \in M \text{ s.t. } ||x_0 - y_n|| < d + \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \frac{|f(x_0 - y_n)|}{||x_0 - y_n||} = \frac{|f(x_0)|}{||x_0 - y_n||} > \frac{d}{d + \frac{1}{n}} \to 1 \text{ as } n \to \infty \\ &\Rightarrow \sup_n \frac{|f(x_0 - y_n)|}{||x_0 - y_n||} \geqslant 1 \\ &\Rightarrow ||f|| \geqslant 1 \end{aligned}$$

**定理 2.7.5**

$X$ 是度量空间，$M$ 是其子空间，$0 \neq x_0 \in X$，那么

$$x_0 \in \overline{\text{span } M} \Leftrightarrow f(x_0) = 0, \forall f \in X^* \text{ with } f(M) = \{0\}$$

**证明** 必要性：设 $x_0 \in \overline{\text{span } M}$，对于 $\forall f \in X^*$ 满足 $f(M) = \{0\}$，有：

$$f(\text{span } M) = f(\overline{\text{span } M}) = \{0\}$$

从而 $f(x_0) = 0$.

充分性：假设 $x_0 \notin \overline{\text{span } M}$，则

$$d \overset{\text{def}}{=} \text{dist}(x_0, \overline{\text{span } M}) > 0$$

由定理 2.7.4，存在 $f \in X^*$ 满足 $||f|| = 1$ 且

$$f(\overline{\text{span } M}) = \{0\}, f(x_0) = d > 0$$

矛盾。

### 2.7.2 几何形式——凸集分离

**定义 2.7.2**

$X$ 是向量空间，$C \subset X$，

1. 如果 $-C = C$，称 $C$ 对称。
2. 如果 $\forall x, y \in C$，$\forall t \in [0, 1]$，都有 $tx + (1-t)y \in C$，称 $C$ 是凸集 (Convex set)。
3. 如果 $\forall x \in X$，存在 $t > 0$ 使得 $\frac{x}{t} \in C$，称 $C$ 是吸收的。

**命题 2.7.1**

任一族凸集之交仍然是凸集。

**定义 2.7.3**

对于集合 $A$，包含 $A$ 的所有凸集之交称为 $A$ 的凸包，记作

$$\operatorname{conv}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\text{Convex } C \supset A} C$$

**定义 2.7.4**

对于

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \{\lambda_k\}_{k=1}^{n}$$

称

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

为 $x_1, \cdots, x_n$ 的一个凸组合。

**命题 2.7.2**

$\operatorname{conv}(A)$ 就是 $A$ 中向量的凸组合全体。

**定义 2.7.5**

$X$ 是向量空间，$C$ 是包含 0 的凸集，广义实值函数 $P_C : X \to [0, +\infty]$，

$$P_C(x) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\}$$

称为 $C$ 的 Minkowski 泛函。

$$P_C(x) = +\infty \Leftrightarrow \{t > 0 : \frac{x}{t} \in C\} = \varnothing$$

**命题 2.7.3**

关于 $P_C$，

1. $P_C(0) = 0.$
2. 正齐次性：$P_C(tx) = tP_C(x), \forall x \in X, \forall t > 0.$
3. 次可加性：$P_C(x + y) \leqslant P_C(x) + P_C(y)$

注意 $P_C$ 可能取 $+\infty$，不一定是次线性泛函。

**证明** 只说明 3. 不妨设 $P_C(x), P_C(y) \in \mathbb{R}$，

$$\forall \varepsilon > 0, \lambda \stackrel{\text{def}}{=} P_C(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \mu \stackrel{\text{def}}{=} P_C(y) + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in C \Rightarrow & \frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in C \\
\Rightarrow & \lambda + \mu \geqslant P_C(x+y) \\
\Rightarrow & P_C(x+y) \leqslant P_C(x) + P_C(y) + \varepsilon
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得到结论。

**定义 2.7.6**

$X$ 是复向量空间，$C$ 是包含 0 的凸集，如果 $\forall x\in C,\forall\theta\in\mathbb{R}$，都有 $e^{i\theta}x\in C$，则称 $C$ 均衡。

**命题 2.7.4**

复向量空间中每个均衡、吸收凸集都决定了一个半范数。

**证明** 吸收 $\Rightarrow P_C$ 是次线性泛函，均衡 $\Rightarrow$ 齐次性。

**定义 2.7.7**

$X$ 是实向量空间，$M$ 是闭子空间，称 $M$ 是 $X$ 的极大子空间是指任一 $X$ 的闭子空间 $Y$，若满足 $M\subsetneqq Y$，则 $Y=X$,

**命题 2.7.5**

$M$ 是极大子空间 $\Leftrightarrow\exists x_0\in X$ 使得 $X=M\oplus\mathrm{span}\{x_0\}$，也就是 $\mathrm{codim}\,M=\dim(X/M)=1$.（习题 2.4.8.）

**证明** ($\Leftarrow$)：$\dim(X/M)=1$，则 $\forall x_0\notin M$

$$X/M=\{\lambda[x_0]:\lambda\in\mathbb{K}\}$$

假设存在线性子空间 $S$ 使得 $M\subsetneqq S$，则取 $x_0\in S\backslash M$，从而

$$\mathrm{span}x_0=\mathrm{span}x_0\oplus M\subset S$$

而实际上 $[\lambda x_0]=\{\lambda x_0+m:m\in M\}$，因此

$$X=\{\lambda x_0+m:m\in M,\lambda\in\mathbb{K}\}=\mathrm{span}\{x_0\}\oplus M\subset S$$

只能 $X=S$，与极大性矛盾。

($\Rightarrow$)：取 $x_0\notin M$，则

$$M\subsetneqq\bigcup_{\lambda\in\mathbb{K}}(ax_0+M)=\mathrm{span}\{x_0\}\oplus M$$

从而后者 $=X$，所以 $\dim(X/M)=1$.

**定义 2.7.8**

超平面是指极大子空间的平移。

对于 $X$ 上线性泛函 $f$ 和 $r\in\mathbb{R}$,

$$H_f^r\overset{\text{def}}{=}f^{-1}(\{r\})=\{x\in X:f(x)=r\}$$

**命题 2.7.6**

$L$ 是超平面 $\Leftrightarrow$ 存在某个 $f$ 和 $r$，使得 $L=H_f^r$.

**证明** 充分性：注意到 $H_f^0=\mathrm{Ker}(f)$，Claim：$H_f^0$ 是极大子空间。取 $x_0\in X\backslash H_f^0$，

$$f(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0)=0,\forall x\in X\Rightarrow f-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in H_f^0,\forall x\in X$$
$$\Rightarrow X=H_f^0\oplus\mathrm{span}\{x_0\}$$

Claim 得证。令 $r\overset{\text{def}}{=}f(x_0)$，则

$$x\in H_f^r\Leftrightarrow f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow x-x_0\in H_f^0\Leftrightarrow x\in H_f^0+x_0$$

所以 $H_f^r$ 是极大子空间 $H_f^0$ 的平移，为超平面。

必要性：设 $L = M + a$，$M$ 是极大子空间，那么存在某个 $x_0$ 使得 $X = M \oplus \mathrm{span}\{x_0\}$，令

$$f : X \to \mathbb{R}, x = y + \lambda x_0 \mapsto \lambda$$

于是 $f(M) = \{0\}$ 且 $f(x_0) = 1$，进而 $M \subset H_f^0$，由 $M$ 极大 $\Rightarrow M = H_f^0$，因此 $L = H_f^r$ with $r = 1$.

**命题 2.7.7**

$f \in X^* \Rightarrow \forall r \in \mathbb{R}, H_f^r$ 是闭超平面。

**定义 2.7.9**

设 $X$ 是实向量空间，$A, B \subset X$，

1. 称 $H_f^r$ 分离 $A, B$ 是指：

$$\sup_{x\in X} f(x) \leqslant r \leqslant \inf_{y\in B} f(y)$$

或者

$$\sup_{y\in B} f(y) \leqslant r \leqslant \inf_{x\in A} f(x)$$

2. 称 $H_f^r$ 严格分离 $A, B$ 是指上述不等号严格成立。

**定理 2.7.6**

$X$ 是实赋范空间，$C$ 是有内点的凸集，$x_0 \notin C \Rightarrow \exists f \in X^*, \exists r \in \mathbb{R}$ 满足 $H_f^r$ 分离 $x_0$ 和 $C$.

**证明** 不妨设 0 是 $C$ 的内点，$P_C$ 是 $C$ 的 Minkowski 泛函，由习题 1.5.1，$P_C$ 是次线性泛函，并且

$$\overline{C} = \{x \in X : P_C(x) \leqslant 1\}$$

$x_0 \notin C \Rightarrow P_C(x_0) \geqslant 1$，0 是 $C$ 的内点 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t. $B(0, \varepsilon) \subset C$，于是

$$\forall x \in X, x \neq 0, \varepsilon\frac{x}{||x||} \in \overline{B(0,\varepsilon)} \subset \overline{C}$$

进而

$$P_C(\varepsilon\frac{x}{||x||}) \leqslant 1, \forall 0 \neq x \in X$$

也就是

$$P_C(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||x||, \forall x \in X$$

令 $M = \mathrm{span}\{x_0\}$，定义

$$f_0 : M \to \mathbb{R}, x = \lambda x_0 \mapsto \lambda P_C(x_0)$$

则 $f_0(x) \leqslant P_C(x), \forall x \in M$，由实 HBT 可得存在 $f : X \to \mathbb{R}$ 满足 $f|_M = f_0$ 且 $f(x) \leqslant P_C(x), \forall x \in X$，进而

$$f(x_0) = f_0(x_0) = P_C(x_0) \geqslant 1, f(x) \leqslant P_C(x) \leqslant 1, \forall x \in C$$

因此 $H_f^1$ 分离 $x_0$ 和 $C$.

只剩下证明 $f \in X^*$，

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant P_C(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||x||, \forall x \in X \Rightarrow &- f(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||x|| \\ \Rightarrow &|f(x)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}||x||, \forall x \in X \\ \Rightarrow &f \in X^* \end{aligned}$$

**定理 2.7.7 (Hahn-Banach 凸集分离定理)**

$X$ 是实赋范空间，$A$ 是开凸集，$B$ 是凸集，若 $A\cap B=\varnothing$，则存在 $H_f^r$ 闭，并分离 $A,B$.

**证明** 令 $C=A-B$，即

$$C=\{x-y:x\in A,y\in B\}=\bigcup_{y\in B}(A-y)$$

那么 $C$ 是凸开集，而且 $0\notin C$，由定理 2.7.6，$H_f^0$ 分离 $C$ 和 $\{0\}$，即存在 $f\in X^*$ 使得

$$\sup_{\delta\in C} f(\delta)\leqslant 0=f(0)$$

而

$$\sup_{\delta\in C} f(\delta)=\sup_{x\in A,y\in B}[f(x)-f(y)]=\sup_{x\in A} f(x)-\inf_{y\in B} f(y)$$

因此

$$\sup_{x\in A} f(x)\leqslant r\leqslant \inf_{y\in B} f(y)$$

这里

$$r\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}[\sup_{x\in A} f(x)+\inf_{y\in B} f(y)]$$

**定理 2.7.8 (Hahn-Banach 凸集分离定理 2)**

$X$ 是实赋范空间，$A$ 是闭凸集，$B$ 是紧凸集，若 $A\cap B=\varnothing$，则存在 $H_f^r$ 闭，并严格分离 $A,B$.

**证明** $A$ 闭 $B$ 紧且不交，所以 $\operatorname{dist}(A,B)>0$，令 $\varepsilon=\frac{1}{4}\operatorname{dist}(A,B)$，

$$A_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}A+B(0,\varepsilon),B_\varepsilon\overset{\text{def}}{=}B+B(0,\varepsilon)$$

这两个都是开凸集且不交，由定理 2.7.7 可知 $\exists f\in X^*,\exists r\in\mathbb{R}$ 满足

$$\sup_{x\in A_\varepsilon} f(x)\leqslant r\leqslant \inf_{y\in B_\varepsilon} f(y)$$

所以

$$f(x+\varepsilon\delta)\leqslant r\leqslant f(y+\varepsilon\delta),\forall x\in A,\forall y\in B,\forall\delta\in B(0,1)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -f(\delta)\leqslant\frac{f(y)-r}{\varepsilon}\\
&\Rightarrow ||f||=\sup_{\delta\in B(0,1)} f(-\delta)\leqslant\frac{f(y)-r}{\varepsilon}\\
&\Rightarrow r\leqslant f(y)-\varepsilon||f||,\forall y\in B\\
&\Rightarrow r\leqslant \inf_{y\in B} f(y)-\varepsilon||f||<\inf_{y\in B} f(y)
\end{aligned}$$

同理，

$$\sup_{x\in A} f(x)<\sup_{x\in A} f(x)+\varepsilon||f||\leqslant r$$

## 应用和推论

**推论 2.7.6 (Ascoli)**

$X$ 是实赋范空间，$C$ 是闭凸集，若 $x_0\notin C$，则

$$\exists f\in X^*,\exists r\in\mathbb{R}\text{ s.t. }\sup_{x\in C} f(x)<r<f(x_0)$$

**推论 2.7.7**

$X$ 是实赋范空间，$M$ 是其子空间，

$$\overline{M} \neq X \Leftrightarrow \exists f \in X^*, f \neq 0 \text{ s.t. } f(M) = \{0\}$$

等价地，

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow \forall f \in X^* \text{ with } f(M) = \{0\} \Rightarrow f = 0$$

**证明** 假设存在 $x_0 \in X \backslash \overline{M}$，由 Ascoli，

$$\exists f \in X^*, \exists r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \sup_{x \in \overline{M}} f(x) < r < f(x_0)$$

进而 $f|_{\overline{M}} = 0 \Rightarrow f(M) = \{0\}$，所以 $0 < r < f(x_0)$，$f \neq 0$，矛盾。所以 $X = \overline{M}$.

**推论 2.7.8 (Mazur)**

$X$ 是实赋范空间，$C$ 是开凸集，$F$ 是线性子流形（子空间的平移），若 $C \cap F = \varnothing$，则存在 $H_f^r$ 闭满足 $F \subset H_f^r$ 且 $\sup_{x \in C} f(x) \leqslant r$.

**证明** 设 $F = M + x_0$，$M$ 是子空间，由分离定理

$$\exists f \in X^*, \exists s \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \sup_{x \in C} f(x) \leqslant s \leqslant \inf_{y \in F} f(y) = \inf_{\delta \in M} f(\delta) + f(x_0)$$

进而

$$\begin{aligned} \inf_{\delta \in M} f(\delta) \geqslant s - f(x_0) &\Rightarrow f|_M = 0 \\ &\Rightarrow M \subset H_f^0 \\ &\Rightarrow F \subset H_f^r \text{ with } r = f(x_0) \end{aligned}$$

同时，

$$\sup_{x \in C} f(x) \leqslant s \leqslant f(x_0) = r$$

**定义 2.7.10**

称超平面 $L = H_f^r$ 是凸集 $C$ 在 $x_0$ 处的承托超平面是指：$C$ 完全落在 $L$ 的一侧，且 $x_0 \in \overline{C} \cap L$，即

$$\sup_{x \in C} f(x) \leqslant r = f(x_0)$$

或者

$$\inf_{x \in C} f(x) \geqslant r = f(x_0)$$

**定理 2.7.9**

$X$ 是实赋范空间，$C$ 是有内点的闭凸集，$\forall x_0 \in \partial C$ 均有 $C$ 的一个承托超平面。

**证明** 令 $E = C^\circ$，即 $C$ 的全体内点，$F = \{x_0\}$，由 Mazur 可得

$$\exists f \in X^*, \exists r \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \sup_{x \in E} f(x) \leqslant r \text{ and } \{x_0\} \subset H_f^r$$

由连续性

$$\sup_{x \in C} f(x) \leqslant r = f(x_0)$$

**例 2.7.2.**

$C=B(0,r)$，$\forall x_0\in\partial B(0,r)$，均有承托超平面。

证明 $\exists f\in X^*, ||f||=1$ 使得 $f(x_0)=||x_0||=r$，而

$$\sup_{x\in C} f(x)\leqslant ||f||\sup_{x\in C}||x||=r$$

**例 2.7.3.**

设 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 是 Banach 空间 $X$ 中绝对收敛级数，$\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的任一重排，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}y_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

证明 $\forall f\in X^*$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(x_k)|\leqslant ||f||\sum_{k=1}^{\infty}||x_k||<\infty$$

于是 $\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)$ 是 $\mathbb{K}$ 上的绝对收敛级数，重排不变，所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}f(y_k)=\sum_{k=1}^{\infty}f(x_k)\Rightarrow f(\sum_{k=1}^{\infty}y_k)=f(\sum_{k=1}^{\infty}x_k),\forall f\in X^*\overset{\text{Cor 2.7.4}}{\Rightarrow}\sum_{k=1}^{\infty}y_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

## 2.8 对偶空间、自反空间、弱收敛

### 2.8.1 对偶空间

**定义 2.8.1**

$X$ 的对偶空间 $X^*$ 是指 $X$ 上所有线性泛函组成的空间，即

$$X^*\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$$

回顾：$(X,m,\mu)$ 是一可测空间，$\Omega$ 是 $X$ 上可测函数全体，

$$L^p=L^p(\Omega,m,\mu)\overset{\text{def}}{=}\{f\in\Omega:||f||_p=(\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}<\infty\}$$

对于 $1\leqslant p\leqslant\infty$，对偶空间 $(L^p)^*$ 是什么？

**定理 2.8.1 (Riesz)**

设 $1\leqslant p<\infty$，则 $(L^p)^*=L^q$，其中

$$q=\begin{cases}\frac{p}{p-1} & ,1<p<\infty\\ \infty & ,p=1\end{cases}$$

证明 我们希望构造出一个线性等距同构 $J:L^q\to(L^p)^*$，如下：

$$\forall g\in L^q,\Lambda_g:L^p\to\mathbb{K},f\mapsto\Lambda_g(f)\overset{\text{def}}{=}\int fg$$

$$J:L^q\to(L^p)^*,g\mapsto\Lambda_g$$

需要证明：

1° $\Lambda_g\in(L^p)^*$.

2° $J$ 线性。

3° $||\Lambda_g|| = ||g||_q$，即 $J$ 等距。

4° $\forall \Lambda \in (L^p)^*$，存在唯一 $g \in L^{p'}$ 使得 $\Lambda = \Lambda_g$，即 $J$ 是双射。

**Proof of** $1° - 3°$：先考虑 $1 < p < \infty$，

$$\forall f \in L^p, |\Lambda_g(f)| = |\int fg| \leqslant ||g||_q \cdot ||f||_p$$

于是 $\Lambda_g \in (L^p)^*$，且 $||\Lambda_g|| \leqslant ||g||_q$. 取

$$\tilde{f} \overset{\text{def}}{=} |g|^{q-1}\text{sgn}(g)$$

则

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} |\tilde{f}|^p = |g|^{(q-1)p} = |g|^q \\ \tilde{f} \cdot g = |g|^q \end{cases} &&\Rightarrow \begin{cases} |\tilde{f}|_p^p = ||g||_q^q \\ \Lambda_g(\tilde{f}) = ||g||_q^q \end{cases} \\
& &&\Rightarrow \frac{|\Lambda_g(\tilde{f})|}{||\tilde{f}||_p} = \frac{||g||_q^q}{||g||_q^{\frac{q}{p}}} = ||g||_q^{q(1-\frac{1}{p})} = ||g||_q \\
& &&\Rightarrow ||\Lambda_g|| \geqslant ||g||_q
\end{aligned}$$

接下来考虑 $p = 1$，此时需假设 $\mu$ 是 $\sigma$-有限的，不妨设 $\mu$ 有限，由

$$|\Lambda_g(f)| \leqslant ||g||_\infty ||f||_1$$

得 $\Lambda_g \in (L^1)^*$ 且 $||\Lambda_g|| \leqslant ||g||_\infty$，令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \{t \in \Omega : |g(t)| > ||\Lambda_g|| + \frac{1}{k}\}, f_k \overset{\text{def}}{=} \chi_{E_k} \cdot \text{sgn}(g)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ||f_k||_1 = \int_{E_k} |\text{sgn}(g)| \mathrm{d}\mu \leqslant \mu(E_k) \\
&\Rightarrow ||\Lambda_g||\mu(E_k) \geqslant ||\Lambda g|| \geqslant |\Lambda_g(f_k)| = \int \chi_{E_k} \text{sgn}(g) g \mathrm{d}\mu = \int_{E_k} |g| \mathrm{d}\mu \geqslant (||\Lambda_g|| + \frac{1}{k})\mu(E_k) \\
&\Rightarrow \mu(E_k) = 0, \forall k \\
&\Rightarrow \{t \in \Omega : |g(t)| > ||\Lambda_g||\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \text{零测} \\
&\Rightarrow ||g||_\infty \leqslant ||\Lambda_g||
\end{aligned}$$

**Proof of** $4°$：以下假设 $\Omega = [0, 1]$，$\mu = m$，

**引理 2.8.1**

设 $g \in L^1$，如果存在 $C > 0$ 满足

$$|\int fg| \leqslant C||f||_p, \forall f \in L^\infty$$

则 $g \in L^q$ 且 $||g||_q \leqslant C$.

证明

后面也太复杂了，不抄了。

那么，$(L^\infty)^*$ 是 $L^1$ 吗？答案是否定的。

**定理 2.8.2**

$L^1 \subsetneqq (L^\infty)^*$.

证明 对于 $\forall g \in L^1$，

$$|\Lambda_g(f)| = |\int fg| \leqslant ||g||_1 ||f||_\infty \Rightarrow \Lambda_g \in (L^\infty)^* \Rightarrow L^1 \subset (L^\infty)^*$$

注意到 $C[0, 1]$ 是 $L^\infty$ 的闭子空间，取 $f_0 \in L^\infty \backslash C[0, 1]$，于是 $d \overset{\text{def}}{=} \text{dist}(f_0, C[0, 1]) > 0$，由 HBT 可知存在 $\Lambda \in$

$(L^\infty)^*, ||\Lambda|| = 1$ 且

$$\Lambda(C[0,1]) = \{0\}, \Lambda(f_0) = d$$

假设存在 $g \in L^1$ 满足 $\Lambda = \Lambda_g$，即

$$\Lambda(f) = \int fg, \forall f \in L^\infty$$

那么对于 $f \in C[0,1]$，$\Lambda(f) = \int fg = 0$，取 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C[0,1]$，满足

$$||f_n - \text{sgn}(g)||_1 \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

于是有子列 $f_{n_k} \overset{\text{a.e.}}{\to} \text{sgn}(g)$，由 MCT 得

$$\int |g| = \lim_{k\to\infty} \int f_{n_k} g = 0 \Rightarrow g \overset{\text{a.e.}}{=} 0 \Rightarrow \Lambda = \Lambda_g = 0$$

这与 $\Lambda(f_0) = d > 0$ 矛盾。

接下来讨论 $C[a,b]$ 的对偶空间。

**定义 2.8.2**

对 $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ 和 $[a,b]$ 的划分 $P$，定义

$$V(f,P) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

如果 $\sup\limits_P V(f,P) < \infty$，则称 $f$ 是有界变差的。

$$V_a^b(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_P V(f,P)$$

称为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的全变差。

$$BV[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{[a,b]\text{上的有界变差函数全体}\}$$

我们进一步给出 $BV[a,b]$ 上的范数：

$$||f||_{BV} \overset{\text{def}}{=} |f(a)| + V_a^b(f)$$

那么 $(BV[a,b], ||\cdot||_{BV})$ 是 Banach 空间，定义：

$$BV_0[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{f \in BV[a,b] : f\text{在 } (a,b) \text{ 上右连续，} f(a) = 0\}$$

那么 $BV_0[a,b]$ 是 $BV[a,b]$ 的闭子空间，也是 Banach 空间。

**定义 2.8.3 (Riemann-Stieltjes 积分)**

设 $f,g$ 是 $[a,b]$ 上实值函数，$I \in \mathbb{R}$，对 $[a,b]$ 进行划分：

$$\sigma(\Delta,\xi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]$$

其中

$$\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$$

如果 $\sigma(\Delta,\xi) \to I$ as $||\Delta|| \to 0$，则记

$$I = \int_a^b f\mathrm{d}g$$

称为 $f$ 关于 $g$ 的 Riemann-Stieltjes 积分，简记为 R-S 积分。

**定理 2.8.3 (Riesz)**

$C[a,b]^* = BV_0[a,b]$.

思路：$\forall g \in BV_0[a,b]$，取

$$\Lambda_g(f) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f \mathrm{d}g, f \in C[a,b]$$

证明 $g \mapsto \Lambda_g$ 是线性等距同构。

## 2.8.2 自反空间

**定义 2.8.4**

$X^{**} = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{K})$，称为 $X$ 的二次对偶或第二共轭空间。

设 $x \in X$，定义映射：

$$x^{**}: X^* \to \mathbb{K}, f \mapsto f(x)$$

则

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant ||x|| \cdot ||f||, \forall f \in X^*$$

因此 $x^{**} \in X^{**}$ 且 $||x^{**}|| \leqslant ||x||$. 另一方面由推论 2.7.1，存在 $f_0 \in X^*$ with $||f_0|| = 1$ s.t. $f_0(x) = ||x||$，即

$$x^{**}(f_0) = f_0(x) = ||x||$$

于是 $||x^{**}|| \geqslant |x^{**}(f_0)|/||f_0|| = ||x||$，于是映射

$$i: X \to X^{**}, x \mapsto x^{**}$$

是线性等距嵌入，称为 $X$ 到 $X^{**}$ 的自然映射或自然嵌入 (canonical map).

**定义 2.8.5**

如果自然映射 $i$ 是满射，从而是线性等距同构，则称 $X$ 自反，记作 $X^{**} = X$.

**例 2.8.1.**

不完备的空间一定不自反、有限维赋范空间一定自反 (习题 2.5.4)。

**例 2.8.2.**

Hilbert 空间自反。（作业）

**证明** 由 Riesz 表示定理，有等距同构 $\varphi: H \to H^*, x \mapsto \langle \cdot, x \rangle.\varphi$ 诱导了 $H^*$ 上的内积 $\langle f, g \rangle = \overline{\langle \varphi^{-1}(f), \varphi^{-1}(g) \rangle}$。对偶空间自然完备，因此 $H^*$ 也是 Hilbert 空间，由 Riesz 表示定理，又有等距同构 $\Phi: H^* \to H^{**}, f \mapsto \overline{\langle \varphi^{-1}(\cdot), \varphi^{-1}(f) \rangle}$.

$$\Phi \circ \varphi(x)(f) = \overline{\langle \varphi^{-1}(f), x \rangle} = \langle x, \varphi^{-1}(f) \rangle = f(x), \forall x \in H, f \in H^*$$

故 $\Phi \circ \varphi$ 就是 $H \to H^{**}$ 的自然映射 $\phi$, 因此 $\phi$ 也是等距同构，从而 $H$ 自反。

**定理 2.8.4**

当 $1 < p < \infty$ 时，$L^p$ 自反。

**证明** 即证明：$\forall \Lambda \in (L^p)^{**}$，存在 $u \in L^p$ 使得

$$\Lambda(f) = f(u), \forall f \in (L^p)^*$$

这是因为

$$i: L^p \to (L^p)^{**}\text{满} \Leftrightarrow \forall \Lambda \in (L^p)^{**}, \exists u \in L^p \text{ s.t. } u^{**} = \Lambda(\Lambda(f) = u^{**}(f) = f(u))$$

回顾定理 2.8.1，

$$J: L^q \to (L^p)^*, v \mapsto f_v$$

是线性等距同构，这里 $f_v(u) = \int uv$. 取

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} \Lambda \circ J$$

则 $\varphi \in (L^q)^* = L^p$，存在唯一 $u \in L^p$ 满足 $\varphi(v) = \int uv, \forall v \in L^q$. 那么对于 $\forall f \in (L^p)^*$，令

$$v_f \overset{\text{def}}{=} J^{-1}(f)$$

那么

$$\Lambda(f) = \Lambda(J(v_f)) = \varphi(v_f) = \int v_f u = f(u)$$

**定理 2.8.5**

$C[a,b]$ 不自反。

**证明** 假设自反，则 $\forall \Lambda \in C[a,b]^{**}$，存在 $u \in C[a,b]$ 满足

$$\Lambda(f) = f(u), \forall f \in C[a,b]^* \tag{*}$$

根据 $C[a,b]^* = BV_0[a,b]$，

$$\exists! v_f \in BV_0[a,b] \text{ s.t. } f(u) = \int_a^b u \mathrm{d}v_f, \forall u \in C[a,b] \text{ and } ||v_f||_{BV} = ||f||$$

令 $c = \frac{a+b}{2}$，定义

$$F_c: C[a,b]^* \to \mathbb{R}, f \mapsto v_f(c+0) - v_f(c-0)$$

那么

$$|F_c(f)| \leqslant V_a^b(v_f) = ||v_f||_{BV} = ||f|| \Rightarrow F_c \in C[a,b]^{**}$$

根据 (*)，存在 $u_c \in C[a,b]$ 满足

$$F_c(f) = f(u_c) = \int_a^b u_c \mathrm{d}v_f, \forall f \in C[a,b]^*$$

令

$$v(f) \overset{\text{def}}{=} \int_a^t u_c(s)\mathrm{d}s$$

那么 $v \in BV_0[a,b]$，令 $f_v \overset{\text{def}}{=} J(v)$，这里

$$J: BV_0[a,b] \to C[a,b]^*, v \mapsto f_v, f_v(u) = \int_a^b u \mathrm{d}v_f$$

$f_v$ 对应的 $v_{f_v} = v$ 连续，于是 $F_c(f_v) = 0$，所以

$$0 = F_c(f_v) = \int_a^b u_c \mathrm{d}v = \int_a^b u_c^2 \mathrm{d}t$$

所以 $u_c = 0$，进而 $F_c = 0$，矛盾。

**定理 2.8.6 (Banach)**

$X^*$ 可分 $\Rightarrow X$ 可分。逆命题不成立，例如 $L^1$ 可分但 $L^\infty$ 不可分。

**证明** **Step1**：证明 $X^*$ 中单位球面 $S_1^*$ 可分。$X^*$ 可分，取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为其稠密子集，不妨 $f_n \neq 0$，令

$$g_n \overset{\text{def}}{=} \frac{f_n}{||f_n||} \in S_1^*$$

那么对于 $\forall g \in S_1^*$，存在 $f_{n_k} \to g$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||g - g_{n_k}|| \leqslant & ||g - f_{n_k}|| + ||f_{n_k} - g_{n_k}|| \\ = & ||g - f_{n_k}|| + ||(||f_{n_k}|| - 1)\frac{f_{n_k}}{||f_{n_k}||}|| \\ = & ||g - f_{n_k}|| + |||f_{n_k}|| + 1| \to 0 \text{ as } k \to \infty\end{aligned}$$

**Step2**：证明存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，其中 $\forall ||x_n|| = 1$，且

$$\overline{\text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = X$$

注意到

$$||g_n|| = \sup_{x \in X, ||x||=1} |g_n(x)| = 1$$

所以存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，其中 $\forall ||x_n|| = 1$，且 $|g_n(x_n)| > \frac{1}{2}$. 令 $M \overset{\text{def}}{=} \text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，假设 $\overline{M} \neq X$，取 $x_0 \in X \backslash \overline{M}$，由 HBT 可得

$$\exists f \in X^*, ||f|| = 1 \text{ s.t. } f(\overline{M}) = \{0\} \text{ and } f(x_0) = \text{dist}(x_0, \overline{M}) > 0$$

于是

$$||g_n - f|| = \sup_{x \in X, ||x||=1} |g_n(x) - f(x)| > |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| > \frac{1}{2}$$

这与 Step1 矛盾。

**Step3**：证明 $\overline{\text{span}^{\mathbb{Q}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}} = X$.

**定理 2.8.7**

当 $1 \leqslant p < \infty$，$L^p[0,1]$ 可分。

**证明**

$$\left\{\sum_{k=0}^{2^n-1} r_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} : r_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

是 $L^p[0,1]$ 的可数稠密子集。

**定理 2.8.8**

$L^\infty$ 不可分。

**证明** 假设存在稠密子集 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，

$$\forall t \in (0,1), \exists f_{n_t} \in B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$$

而 $t \neq s$ 时，$\text{dist}(\chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]}) = 1$，因此不同的 $B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$ 不相交，所以 $\varphi : (0,1) \to \mathbb{N}, t \mapsto n_t$ 是单射，于是 $(0,1)$ 可数，矛盾。

**定理 2.8.9**

$L^1$ 不自反。

**证明** $(L^1)^* = L^\infty$，假设 $L^1$ 自反，则 $(L^\infty)^* \cong L^1$，$L^1$ 可分 $\Rightarrow L^\infty$ 可分，矛盾。

**定理 2.8.10 (共轭算子)**

$X,Y$ 是赋范空间，$T\in\mathcal{L}(X,Y)\Rightarrow\exists T^*\in\mathcal{L}(Y^*,X^*)$ 使得

$$(T^*f)(x)=f(Tx),\forall f\in Y^*,\forall x\in X$$

$T^*$ 称为 $T$ 的共轭算子。进而映射 $*:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathcal{L}(Y^*,X^*),T\mapsto T^*$ 是一个线性等距嵌入。

**证明** 设 $f\in Y^*$，定义映射：

$$\Lambda_f:X\to\mathbb{K},x\mapsto f(Tx)$$

则

$$|\Lambda_f(x)|=|f(Tx)|\leqslant||f||\cdot||Tx||\leqslant||f||\cdot||T||\cdot||x||,\forall x\in X$$

于是 $\Lambda_f\in X^*$，且 $||\Lambda_f||\leqslant||f||\cdot||T||$，定义映射

$$T^*:Y^*\to X^*,f\mapsto\Lambda_f$$

于是 $T^*$ 线性而且 $||T^*f||=||\Lambda_f||\leqslant||T||\cdot||f||$，从而 $T^*$ 有界且 $||T^*||\leqslant||T||$.

对于 $\forall x\in X$，不妨 $x\neq 0$，由 HBT，

$$\exists f\in Y^*,||f||=1,f(Tx)=||Tx||$$

于是

$$||Tx||=|f(Tx)|=|(T^*f)(x)|\leqslant||T^*f||\cdot||x||\leqslant||T^*||\cdot||f||\cdot||x||=||T^*||\cdot||x||$$

所以 $||T||\leqslant||T^*||$.

**例 2.8.3.**

$T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m,x\mapsto Ax$ with $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$T^*:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^n,y\mapsto\overline{A^T}y$.

**定理 2.8.11 (pettis)**

自反空间的闭子空间自反。

**证明** 设 $X$ 自反，$Y$ 是其闭子空间，只需证明：

$$\forall a\in Y^{**},\exists y\in Y\text{ s.t. }a(f)=f(y),\forall f\in Y^*$$

定义映射

$$T:X^*\to Y^*,f\mapsto f|_Y$$

则 $T$ 是有界线性映射，于是取 $T^*\in\mathcal{L}(Y^{**},X^{**})$ 满足

$$(T^*a)(f)=a(Tf),\forall f\in X^*$$

$X$ 自反，所以自然映射 $i_X$ 是满射，$T^*a\in X^{**}\Rightarrow\exists y\in X\text{ s.t. }T^*a=y^{**}$，所以

$$(T^*a)(f)=y^{**}(f)=f(y),\forall f\in X^*$$

下面证明 $y\in Y$，假设不然，则存在 $\tilde{f}\in X^*$ 使得 $\tilde{f}(Y)=0$，

$$T(\tilde{f})=\tilde{f}|_Y=0\Rightarrow\tilde{f}(y)=(T^*a)(\tilde{f})=a(T(\tilde{f}))=0$$

这与 $\tilde{f}(y)=\operatorname{dist}(y,Y)>0$ 矛盾。

最后说明：$a(f)=f(y),\forall f\in Y^*$. 对于 $\forall f\in Y^*$，由 HBT，存在 $F\in X^*$ 使得 $f=TF$，所以

$$a(f)=a(TF)=(T^*a)(F)=F(y)=f(y)$$

### 2.8.3 弱收敛

**定义 2.8.6**

$X$ 是赋范空间，称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 弱收敛于 $x_0 \in X$ 是指：

$$f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in X^*$$

记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 或者 $x_n \to x_0$，称 $x_0$ 为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的弱极限。

依范数拓扑收敛即为强收敛。

**命题 2.8.1**

强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛。

**证明**

$$||x_n - x_0|| \to 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leqslant ||f|| \cdot ||x_n - x_0|| \to 0, \forall f \in X^*$$

**例 2.8.4.**

$X = L^2(\Pi)$，$e_k(t) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{-2\pi i k t}, k \in \mathbb{Z}$，则 $e_k \xrightarrow{w} 0$ as $|k| \to \infty$. 即：

$$\forall f \in X^*, \exists v \in L^2(\Pi) \text{ s.t. } f(u) = \int_{\Pi} uv, u \in L^2(\Pi)$$

因此

$$f(e_k) = \int_0^1 v(t)\mathrm{e}^{-2\pi i k t} \mathrm{d}t = \hat{v}(k) \to 0 \text{ as } |k| \to \infty$$

**定理 2.8.12**

$\dim X < \infty \Rightarrow$ 弱收敛与强收敛等价。

**证明** 设 $\dim(X) = m$，设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 $X$ 的一组基，由 HBT（习题 2.4.7）知存在对偶基 $f_1, \cdots, f_m \in X^*$ 满足

$$f_k(e_j) = \delta_{kj}, 1 \leqslant k, j \leqslant m$$

设 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，即

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(n)} e_j \xrightarrow{w} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^{(0)} e_j$$

于是

$$f_j(x_n) \to f_k(x_0), k = 1, 2, \cdots, m$$

因此 $||x_n - x_0||_{\infty} \to 0$ with $||x||_{\infty} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} |\alpha_i|$，由有限维空间范数等价可得 $||x_n - x_0|| \to 0$.

**定理 2.8.13 (Mazur)**

$x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow x_0 \in \overline{\text{conv}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$

**证明** 令 $C = \overline{\text{conv}(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})}$，假设 $x_0 \notin C$，则由 Ascoli，存在 $f \in X^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{x \in C} f(x) < \alpha < f(x_0)$$

$\Rightarrow f(x_n) < \alpha < f(x_0), n = 1, 2, \cdots$，与 $f(x_n) \to f(x_0)$ 矛盾。

**定义 2.8.7**

称 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ 弱 * 收敛于 $f \in X^*$ 是指

$$f_n(x) \to f(x), \forall x \in X$$

记作 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

$X^*$ 中，强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱 * 收敛。

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{w} f &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Lambda(f_n) \to \Lambda(f), \forall \Lambda \in X^{**} \\ &\Rightarrow x^{**}(f_n) \to x^{**}(f), \forall x \in X \\ &\Leftrightarrow f_n(x) \to f(x), \forall x \in X \\ &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f_n \xrightarrow{w^*} f \end{aligned}$$

**命题 2.8.2**

$X$ 自反 $\Rightarrow$ $X^*$ 中弱 * 收敛与弱收敛等价。

**定理 2.8.14**

$X$ 是度量空间，

$$x_n \xrightarrow{w} x_n \Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_n ||x_n|| < \infty \\ \exists \mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} X^* \text{ s.t. } f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in \mathcal{F} \end{cases}$$

**证明**

$$\begin{aligned} x_n \xrightarrow{w} x_0 &\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in X^* \\ &\Leftrightarrow x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in X^* \\ &\overset{\text{B-S}}{\Rightarrow} \begin{cases} \sup\limits_n ||x_n^{**}|| < \infty \\ \exists \mathcal{F} \overset{\text{dense}}{\subset} X^* \text{ s.t. } x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in \mathcal{F} \end{cases} \end{aligned}$$

**定理 2.8.15**

$X$ 是 Banach 空间，则

$$f_k \xrightarrow{w^*} f \Leftrightarrow \begin{cases} \sup\limits_n ||f_n|| < \infty \\ \exists M \overset{\text{dense}}{\subset} X \text{ s.t. } f_n(x) \to f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

**定义 2.8.8**

称 $M \subset X$ 弱列紧是指 $M$ 中任一序列均有弱收敛子列；称 $\mathcal{F} \subset X^*$ 弱 * 列紧是指 $\mathcal{F}$ 中任一序列均有弱 * 收敛子列。

**定理 2.8.16 (可分 Banach-Alaoglu)**

$X$ 可分 $\Rightarrow$ $X^*$ 中有界集弱 * 列紧。

**证明** 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ 有界，记 $C = \sup\limits_n ||f_n||$，$X$ 可分 $\Rightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\text{dense}}{\subset} X$.

对于 $\forall m$，$\{f_n(x_m)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界数列，有收敛子列，由对角线法，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有子列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\{f_{n_k}(x_m)\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛，Claim：

$$\exists f \in X^* \text{ s.t. } f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f$$

对于 $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0$，存在 $x_m \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t. $||x - x_m|| < \frac{\varepsilon}{3C}$，于是

$|f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_{k+p}}(x_m)| + |f_{n_{k+p}}(x_m) - f_{n_k}(x_m)| + |f_{n_k}(x_m) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon, k$充分大，$\forall p$

第一项 $\leqslant C||x - x_m|| < \frac{\varepsilon}{3}$，第二项在 $k$ 充分大时 $< \frac{\varepsilon}{3}$，第三项 $\leqslant C||x_m - x|| < \frac{\varepsilon}{3}$.

所以 $f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ 存在，且

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |f_n(x)| \leqslant \sup_n ||f_n|| \cdot ||x||$$

所以 $f \in X^*$ 且 $f_{n_k} \overset{w^*}{\to} f$.

**定理 2.8.17 (Alaoglu)**

$X$ 是赋范空间，$X^*$ 中单位闭球是弱 * 紧的。

**定理 2.8.18 (Eberlein-Smulian)**

$X$ 是自反空间，则

1. $X$ 中有界集弱列紧；
2. $X$ 中闭单位球弱自列紧。

**证明** 对于 1，只需证明：$\forall R, \overline{B(0,R)}$ 弱列紧。令 $Y \overset{\text{def}}{=} \overline{\text{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$，为闭子空间，由定理 2.8.11(Pettis) 知 $Y$ 自反，同时因为 $Y$ 可分，所以 $Y^{**} = Y$ 可分，由定理 2.8.6(Banach) 知 $Y^*$ 可分，再由定理 2.8.16(可分 B-A) 知 $Y^{**}$ 中有界集弱 * 列紧，所以

$$\begin{aligned}
||x_n^{**}|| \leqslant R \Rightarrow & \{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}\text{有子列}x_{n_k}^{**} \overset{w^*}{\to} x_0^{**} \in Y^{**} \\
\Rightarrow & \forall f \in Y^*, f(x_{n_k}) = x_{n_k}^{**}(f) \to x_0^{**}(f) = f(x_0) \\
\Rightarrow & \forall F \in X^*, F(x_{n_k}) = (F|_Y)(x_{n_k}) \to (F|_Y)(x_0) = F(x_0) \\
\Rightarrow & x_{n_k} \overset{w}{\to} x_0
\end{aligned}$$

对于 2，

$$x_{n_k} \overset{w}{\to} \overset{\text{Ex 2.5.4}}{\Rightarrow} ||x_0|| \leqslant \liminf_{k\to\infty} ||x_{n_k}|| \leqslant R$$

# 第 3 章 谱理论

## 3.1 谱

### 3.1.1 谱的定义与例子

**定义 3.1.1**

$X$ 是复 Banach 空间，在 $\mathcal{L}(X)$ 上引入乘法：

$$(AB)x \overset{\text{def}}{=} A(Bx)$$

则满足

1. 结合律：$(AB)C = A(BC)$.
2. 分配律：$(A+B)C = AB + AC$，$A(B+C) = AB + AC$.
3. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
4. $AI = IA = A$.
5. $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$

可得 $\mathcal{L}(X)$ 是一个 Banach 代数。

**定义 3.1.2**

称 $A \in \mathcal{L}(X)$ 可逆是指：存在 $B \in \mathcal{L}(X)$ 使得

$$AB = BA = I$$

**定义 3.1.3**

$$\sigma(A) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\text{不可逆}\}$$

称为 A 的谱 (spectrum)，$\sigma(A)$ 中的元素称为谱点。

$$\rho(A) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A\text{可逆}\} = \mathbb{C} \backslash \sigma(A)$$

称为 $A$ 的预解集 (resolvent set)，$\rho(A)$ 中元素称为正则值。

**定义 3.1.4**

如果 $\lambda \in C$ 使得 $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$，即

$$\exists 0 \neq x \in X \text{ s.t. } Ax = \lambda x$$

则称 $\lambda$ 为 $A$ 的特征值，

$$\sigma_p(A) \overset{\text{def}}{=} \{A\text{的特征值}\}$$

称为 $A$ 的点谱。

**例 3.1.1.**

有限维线性空间上的线性映射 $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \Rightarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) \neq \varphi$.

**例 3.1.2.**

设

$$A : C[0,1] \to C[0,1], u(t) \mapsto t \cdot u(t)$$

$A$ 有特征值吗？

**解答：** Show answer

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)u = 0 &\Leftrightarrow \lambda u(t) - tu(t) = 0, \forall t \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow u(t) = 0, \forall t \in [0,1]\end{aligned}$$

无特征值。

**定义 3.1.5**

对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，满足 $\mathrm{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$，则有以下分类：

1. $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq X$，$\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$，则称 $\lambda$ 为 $A$ 的连续谱点，其全体记为 $\sigma_c(A)$，称为 $A$ 的连续谱。
2. $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} \neq X$，则称 $\lambda$ 为 $A$ 的剩余谱点，其全体 $\sigma_r(A)$ 称为 $A$ 的剩余谱。
3. $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = X$，此时 $\lambda \in \rho(A)$.

**例 3.1.3.**

设

$$A : C[0,1] \to C[0,1], u(t) \mapsto t \cdot u(t)$$

则 $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$.

**证明** 先证明：$\mathbb{C} \backslash [0,1] \subset \rho(A)$. 设 $\lambda \in \mathbb{C} \backslash [0,1]$，令

$$T : C[0,1] \to C[0,1], u(t) \mapsto \frac{1}{\lambda - t} u(t)$$

于是 $(\lambda I - A)T = I = T(\lambda I - A)$，且

$$||Tu||_\infty \leqslant \left[ \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{|\lambda - t|} \right] ||u||_\infty$$

所以 $(\lambda I - A)^{-1} = T \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$.

再证明 $[0,1] \subset \sigma_r(A)$. 设 $\lambda \in [0,1]$，对于 $\forall v \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$，存在 $u \in C[0,1]$ 满足

$$(\lambda - t)u(t) = v(t), t \in [0,1]$$

于是 $v(\lambda)=0 \Rightarrow 1 \notin \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)} \Rightarrow \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)} \neq X$.

最后，$[0,1] \subset \sigma_r(A) \subset \sigma(A) \subset [0,1] \Rightarrow \sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$.

**例 3.1.4.**

设

$$A: L^2[0,1] \to L^2[0,1], u(t) \mapsto t \cdot u(t)$$

则 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$.

**证明** 与上例同理可证：$\mathbb{C}\backslash[0,1] \subset \rho(A)$.

再证明:对于 $\forall\lambda \in [0,1]$,$\mathrm{Ran}(\lambda I-A) \neq X$. Claim:$1 \notin (\lambda I-A)$,否则存在 $u \in L^2$ s.t. $1=(\lambda-t)u(t), t \in [0,1]$,从而

$$\frac{1}{\lambda-t} \in u(t) \in L^2[0,1]$$

矛盾。

最后证明：$\forall\lambda \in [0,1], \mathrm{Ran}(\lambda I-A) \overset{\text{dense}}{\subset} X$，对于 $\forall v \in L^2, \forall\varepsilon>0$，定义

$$u_\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda-t} v(t) \cdot \chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)$$

于是 $u_\varepsilon \in L^2$ 且

$$(\lambda I-A)u_\varepsilon = \chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)} v \overset{L^2}{\to} v \text{ as } \varepsilon \to 0^+$$

由积分的绝对连续性，$v \in \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}$.

### 3.1.2 谱的基本性质

**定义 3.1.6**

算子值函数：

$$R_\lambda(A): \rho(A) \to \mathcal{L}(X), \lambda \mapsto (\lambda I-A)^{-1}$$

称为 $A$ 的预解式 (resolvent).

**引理 3.1.1**

设 $T \in \mathcal{L}(X)$，$||T|| \leqslant 1$，则

1. $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.
2. $(I-T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} T^n$.(Von Neumann 级数)
3. $||(I-T)^{-1}|| \leqslant (1-||T||)^{-1}$.

**证明**

1. 令

$$S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} T^k$$

则

$$||S_{n+p}-S_n|| = \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} T^k\right|\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} ||T||^k < \frac{||T||^{k+1}}{1-||T||}$$

$\mathcal{L}(X)$ 完备 $\Rightarrow \exists S \in \mathcal{L}(X)$ 使得 $||S_n-S|| \to 0$. Claim：

$$S(I-T)=(I-T)S=I$$

注意到

$$||S_n(I-T)-I|| = ||I-T^{n+1}-I|| \leqslant ||T||^{n+1} \to 0 \text{ as } n\to\infty$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow ||S(I-T)-I|| &\leqslant ||S(I-T)-S_n(I-T)|| + ||S_n(I-T)-I|| \\ &\leqslant ||S-S_n||\cdot||I-T|| + ||S_n(I-T)-I|| \to 0\end{aligned}$$

从而 $S(I-T)=I$，同理 $(I-T)S=I$.

2. $||S_n-S||\to 0 \Rightarrow (I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^n$.
3. $||S||\leqslant \sup\limits_n ||S_n||$.

**定理 3.1.1**

$\rho(A)$ 是开集，进而 $\sigma(A)$ 是闭集。

**证明** 设 $\lambda_0\in\rho(A)$，

$$\lambda I-A=\lambda_0 I-A+(\lambda-\lambda_0)I=(\lambda_0 I-A)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]$$

由引理 3.1.1，当 $|\lambda-\lambda_0|<||(\lambda_0 I-A)^{-1}||^{-1}$ 时，

$$B\overset{\text{def}}{=}[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}]^{-1}\in\mathcal{L}(X)$$

于是

$$(\lambda I-A)^{-1}=B\cdot R_{\lambda_0}(A)\in\mathcal{L}(X)\Rightarrow\lambda\in\rho(A)\Rightarrow\mathbb{D}(\lambda_0,\frac{1}{||(\lambda_0 I-A)^{-1}||})\subset\rho(A)$$

**命题 3.1.1**

$A\in\mathcal{L}(X)\Rightarrow\sigma(A)\subset\overline{\mathbb{D}(0,||A||)}$.

**证明** 即证明：$\forall\lambda\in\mathbb{C}$ with $|\lambda|>||A||,(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)$，

$$\begin{aligned}|\lambda|>||A|| &\Rightarrow \left|\left|\frac{A}{\lambda}\right|\right|<1\\ &\overset{\text{Lem3.1.1}}{\Rightarrow}\left(I-\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\\ &\Leftrightarrow(\lambda I-A)^{-1}\in\mathcal{L}(X)\end{aligned}$$

**推论 3.1.1**

$\sigma(A)$ 是 $\mathbb{C}$ 中紧集。

**定义 3.1.7**

$X$ 是复 Banach 空间，$\Omega$ 是 $\mathbb{C}$ 上的开集，称算子值函数

$$T:\Omega\to\mathcal{L}(X),\lambda\mapsto T_\lambda$$

在 $\lambda_0\in\Omega$ 全纯是指：存在 $\lambda_0$ 的邻域 $U$ 使得

$$\forall\lambda\in U,\exists S_\lambda\in\mathcal{L}(X)\text{ s.t. }\left|\left|\frac{T_{\lambda+\delta}-T_\lambda}{\delta}-S_\lambda\right|\right|\to 0\text{ as }\delta\to 0$$

**定理 3.1.2**

$\lambda\mapsto R_\lambda(A)$ 是 $\rho(A)$ 上的算子值全纯函数。

**证明**

**引理 3.1.2 (Resolvent Identity)**

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A), \forall \lambda, \mu \in \rho(A)$$

证明

$$\begin{aligned} R_\lambda(A) &= (\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}[\lambda I - A + (\mu - \lambda)I](\mu I - A)^{-1} \\ &= R_\mu(A) + (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A) \end{aligned}$$

♡

**Step1**：连续性。对于 $\forall \lambda_0 \in \rho(A)$，

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}]$$

当 $|\lambda - \lambda_0| < ||(\lambda_0 I - A)^{-1}||^{-1}$ 时，

$$R_\lambda(A) = [I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}R_{\lambda_0}(A)$$

于是当 $|\lambda - \lambda_0| < (2||R_{\lambda_0}(A)||)^{-1}$ 时，

$$||R_\lambda(A)|| \leqslant ||[I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}|| \cdot ||R_{\lambda_0}(A)|| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}||R_{\lambda_0}(A)|| = 2||R_{\lambda_0}(A)||$$

由引理 3.1.2 可知，

$$||R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)|| \leqslant |\lambda - \lambda_0| \cdot ||R_\lambda(A)|| \cdot ||R_{\lambda_0}(A)|| \leqslant 2||R_{\lambda_0}(A)||^2 \cdot |\lambda - \lambda_0|$$

**Step2**：全纯性。

$$\begin{aligned} \left|\left|\frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} + R_{\lambda_0}(A)^2\right|\right| &\overset{\text{R.I.}}{=} ||-R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A) + R_{\lambda_0}(A)^2|| \\ &\leqslant ||R_{\lambda_0}(A)|| \cdot ||R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)|| \to 0 \text{ as } \lambda \to \lambda_0 \end{aligned}$$

**定理 3.1.3 (Gelfand，谱不空定理)**

$0 \neq A \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \sigma(A) \neq \varnothing$.

♡

证明 假设 $\sigma(A) = \varnothing$，则 $\rho(A) = \mathbb{C}$，说明 $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ 时算子值整函数，于是

$$\forall f \in \mathcal{L}(X)^*, u_f(\lambda) \overset{\text{def}}{=} f(R_\lambda(A)), \lambda \in \mathbb{C}$$

是整函数，因为

$$\left|\frac{u_f(\lambda) - u_f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} + f(R_{\lambda_0}(A)^2)\right| \leqslant ||f|| \cdot \left|\left|\frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} + R_{\lambda_0}(A)^2\right|\right| \to 0 \text{ as } \lambda \to \lambda_0$$

另一方面，当 $|\lambda| > 2||A||$ 时，

$$||R_\lambda(A)|| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1 - ||\frac{A}{\lambda}||} = \frac{1}{|\lambda| - ||A||} \leqslant \frac{1}{||A||}$$

而 $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ 连续，在 $\overline{\mathbb{D}(0, 2||A||)}$ 上有界，于是存在 $C > 0$ 使得 $||R_\lambda(A)|| \leqslant C, \forall \lambda \in \mathbb{C}$，

$$|u_f(\lambda)| \leqslant ||f|| \cdot ||R_\lambda(A)|| \leqslant C||f||, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

由 Liouvillle 定理，$u_f$ 是常函数。从而

$$f(R_\lambda(A)) = f(R_\mu(A)), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathcal{L}(X)^*$$

由 HBT，$R_\lambda(A) = R_\mu(A)$，这与 R.I. 矛盾。

**定义 3.1.8**

对于 $A \in \mathcal{L}(X)$，

$$r_\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$$

称为 $A$ 的谱半径。

**定理 3.1.4 (Gelfand，谱半径公式)**

$$r_\sigma(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$$

**证明** **Step1**：先证明右式极限存在，令 $r \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_{n} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$，则

$$\liminf_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \geqslant r$$

另一方面，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $m$ 使得

$$||A^m||^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$$

所以对于 $\forall n \in \mathbb{N}$，有唯一分解 $n = p_n m + q_n$ with $0 \leqslant q_n < m$，所以

$$||A^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant ||A^{p_n m}||^{\frac{1}{n}} ||A^{q_n}||^{\frac{1}{n}} \leqslant ||A^m||^{\frac{q_n}{n}} ||A||^{\frac{q_n}{n}} < (r+\varepsilon)^{\frac{p_n m}{n}} ||A||^{\frac{q_n}{n}}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\frac{q_n}{n} \to 0, \frac{p_n m}{n} \to 1$，所以

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant r + \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$ 则

$$\limsup_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}} \leqslant r$$

**Step2**：证明 $r_\sigma(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$. 我们知道幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||A^n|| z^n$$

的收敛半径为

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}}$$

令 $z = \frac{1}{\lambda}$，可知当 $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 时（收敛圆内绝对收敛）

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left| \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right|\right| < \infty$$

$\mathcal{L}(X)$ 完备，根据引理 1.4.2，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\left| \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right|\right|$$

也收敛。另一方面，

$$\left|\left| \left( \sum_{n=1}^{N} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right) (\lambda I - A) - I \right|\right| = \left|\left| I - \frac{A^{N+1}}{\lambda^{N+1} - I} \right|\right| \to 0$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = (\lambda I - A)^{-1} = R_\lambda(A)$$

从而 $R_\lambda(A) \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow \lambda \in \rho(A) \to r_\sigma(A) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

**Step3**：证明 $r_\sigma(A) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$. 设 $|\lambda| > r_\sigma(A)$，则 $\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \forall f \in \mathcal{L}(X)^*, f(R_\lambda(A))$ 在 $\lambda$ 全纯，从而

$f(R_\lambda(A))$ 在圆环 $|\lambda|>r_\sigma(A)$ 内全纯，故可展为收敛的 Laurent 级数。另一方面，由 Step2，当 $|\lambda|>\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 时，

$$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\Rightarrow f(R_\lambda(A))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}}$$

Laurent 展式唯一，所以这一展式在 $|\lambda|>r_\sigma(A)$ 上也成立。在内部绝对收敛，所以

$$\forall\varepsilon>0,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}<\infty$$

记

$$T_n\overset{\text{def}}{=}\frac{A^n}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}$$

收敛级数通项有界，所以

$$\sup_n|f(T_n)|<\infty,\forall f\in\mathcal{L}(X)^*$$

由 UBP，$C\overset{\text{def}}{=}\sup\limits_n||T_n||<\infty$，从而

$$||A^n||\leqslant C(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant r_\sigma(A)+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to0$ 得证。

$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A)$.

**例 3.1.5.**

右移位算子：

$$A:l^2\to l^2,(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots)$$

则 $\sigma_p(A)=\varnothing$，$\sigma_c(A)=\partial\mathbb{D}$，$\sigma_r(A)=\mathbb{D}$.

**证明** $||A||=1\Rightarrow\sigma(A)=\overline{\mathbb{D}}$，先证明：$\sigma_p(A)=\varnothing$，否则 $\exists\lambda\in\mathbb{C},\exists0\neq x\in\ell^2$ 使得

$$(0,x_1,x_2,\cdots)=Ax=\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots)$$

$\lambda=0\Rightarrow x=0$，$\lambda\neq0\Rightarrow x_1=0\Rightarrow x_2=0\Rightarrow\cdots\Rightarrow x=0$. 矛盾。

再证明:$\mathbb{D}\subset\sigma_r(A)$,设 $\lambda\in\mathbb{D}$,Claim:$\overline{\text{Ran}(\lambda I-A)}\neq\ell^2$. 这等价于 $\text{Ran}(\lambda I-A)^\perp\neq\{0\}$. 令 $z=(1,\overline{\lambda},\overline{\lambda}^2,\cdots)$，则

$$\begin{aligned}\langle(\lambda I-A)x,z\rangle&=\langle(\lambda x_1,\lambda x_2-x_2,\lambda x_3-x_2,\cdots),(1,\overline{\lambda},\overline{\lambda}^2,\cdots)\rangle\\&=\lambda x_1+\lambda^2x_2-\lambda x_1+\lambda^3x_3-\lambda^2x_2+\cdots=0\\&\Rightarrow0\neq z\in\text{Ran}(\lambda I-A)^\perp\end{aligned}$$

然后证明：$\partial\mathbb{D}\subset\sigma_c(A)$. 设 $\lambda\in\partial\mathbb{D}$，

$1^\circ$ 证明 $\text{Ran}(\lambda I-A)\neq\ell^2$.

$$\begin{aligned}\text{Ran}(\lambda I-A)\ni y=(\lambda I-A)x\Rightarrow&y_1=\lambda x_1,y_k=\lambda x_k-x_{k-1},k\geqslant2\\\Rightarrow&y_1=\lambda x_1,\lambda^{k-1}y_k=\lambda^kx_k-\lambda^{k-1}x_{k-1},k\geqslant2\\\Rightarrow&\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}y_j=\lambda^nx_n\end{aligned}$$

假设 $\text{Ran}(\lambda I-A)=\ell^2$，令 $y=e_1$，

$$\begin{aligned}\exists x\in\ell^2\text{ s.t. }e_1=(\lambda I-A)x\Rightarrow&\lambda^nx_n=1,n=1,2,\cdots\\\Rightarrow&x=(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^2},\cdots)\end{aligned}$$

$|\lambda|=1$，不收敛，这与 $x\in\ell^2$ 矛盾。

2° 证明 $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = \ell^2$. 只需证明 $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)^{\perp} = \{0\}$. 对于 $\forall x \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)^{\perp}$，

$$0 = \langle z, (\lambda I - A)e_n \rangle = \overline{\lambda} z_n - z_{n+1}, \forall n$$

所以 $z_{n+1} = \overline{\lambda} z_n \Rightarrow |z_{n+1}| = |z_n| \Rightarrow z = 0$.

最后：$\mathbb{D} \subset \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \subset \sigma(A) \subset \overline{\mathbb{D}}$，由前面结论可得 $\sigma_c(A) = \partial\mathbb{D}$，$\sigma_r(A) = \mathbb{D}$.

## 3.2 紧算子的谱

### 3.2.1 紧算子

**定义 3.2.1**

$X, Y$ 是 Banach 空间，$A \in \mathcal{L}(X, Y)$，

1. 如果 $A$ 把每个有界集映为列紧集，称 $A$ 紧，记作 $A \in \mathcal{T}(X, Y)$.
2. 如果 $A$ 把 $X$ 中每个弱收敛序列映为 $Y$ 中强收敛序列，称 $A$ 全连续。
3. 如果 $\dim(\mathrm{Ran}(A)) < \infty$，则称 $A$ 是有限秩算子，记作 $A \in \mathcal{F}(X, Y)$.

**命题 3.2.1**

$\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{T}(X, Y)$，且是闭子空间。

**证明** 有限维线性空间里的有界集列紧。

**例 3.2.1.**

$I \in \mathcal{T}(X) \Leftrightarrow \dim(X) < \infty$.

**例 3.2.2.**

设 $K(\cdot,\cdot)$ 在 $[a,b]^2$ 上连续，

$$(Tu)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b K(s,t)u(t)\mathrm{d}t$$

则 $T : C[a,b] \to C[a,b]$ 紧。

**证明** 设 $\mathcal{F} \subset C[a,b]$ 有界，记 $M = \sup\limits_{u \in \mathcal{F}} ||u||$，则

$$||Tu|| \leqslant ||T|| \cdot M, \forall u \in \mathcal{F}$$

所以 $T(\mathcal{F})$ 一致有界。

同时，$\forall \varepsilon > 0, \forall u \in \mathcal{F}$，$K(\cdot,\cdot)$ 一致连续 $\Rightarrow \exists \delta > 0$ s.t.

$$|K(s',t) - K(s'',t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}, \forall s', s'' \in [a,b] \text{ with } |s' - s''| < \delta, \forall t \in [a,b]$$

所以

$$|(Tu)(s') - (Tu)(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s',t) - K(s'',t)||u(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon, \forall s', s'' \text{ with } |s' - s''| < \delta, \forall u \in \mathcal{F}$$

所以 $T(\mathcal{F})$ 等度连续，进而列紧。

**命题 3.2.2**

$\mathcal{T}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$，且是闭子空间。

**证明** 设 $A_n \in \mathcal{T}(X, Y)$ 使得 $||A_n - A|| \to 0$，下证 $A$ 紧。设 $M \subset X$ 有界，$C \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_n ||x|| < \infty$，Claim：$A(M)$

列紧。对于 $\forall\varepsilon$，取 $N$ 充分大使得

$$||A_N - A|| < \frac{\varepsilon}{3C}$$

$A_N(M)$ 列紧，

$$\exists x_1, \cdots, x_m \in M \text{ s.t. } A_N(M) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(A_N x_k, \frac{\varepsilon}{3})$$

所以 $\forall x \in M, \exists k \in \{1, 2, \cdots, m\}$ s.t.

$$||A_N x - A_N x_k|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

从而

$$||Ax - Ax_k|| \leqslant ||Ax - A_N x|| + ||A_N x - A_N x_k|| + ||A_N x_k - Ax_k|| < \varepsilon$$

于是 $\{Ax_1, \cdots, Ax_m\}$ 是 $A(M)$ 的有穷 $\varepsilon$ 网。

**命题 3.2.3**

紧算子的值域可分。

**证明**

$$\mathrm{Ran}(A) = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(B(0, n))$$

列紧 $\Rightarrow$ 可分，设 $M_n$ 是 $A(B(0, n))$ 的可数稠密子集，取 $M_n$ 的并即为 $\mathrm{Ran}(A)$ 的可数稠密子集。

**命题 3.2.4**

紧算子与有界算子的（两种）复合是紧算子。

**证明** 设 $T$ 有界，$A$ 紧，若 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ 有界，$A$ 紧所以 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 列紧，有子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛，$T$ 有界所以 $\{TAx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛，因此 $TA$ 是紧算子。

若 $M$ 有界，则 $T(M)$ 有界，$A$ 紧所以 $AT(M)$ 列紧，$AT$ 是紧算子。

**定理 3.2.1**

对于 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$，

1. 紧 $\Rightarrow$ 全连续；
2. 如果 $X$ 自反，则 $A$ 紧 $\Leftrightarrow$ $A$ 全连续。

**证明** 对于 1，假设 $A$ 紧而不全连续，即存在 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 但 $||Ax_n - Ax_0|| \nrightarrow 0$：存在 $\varepsilon_0 > 0$，存在子列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $||Ax_{n_k} - Ax_0|| \geqslant \varepsilon_0$.

那么 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$，由 UBP 知 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有界，$A$ 紧所以 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 有收敛子列，不妨设 $Ax_{n_k} \to y$.

另一方面，$\forall f \in Y^*$，

$$f(Ax_{n_k} - Ax_0) = (A^* f)(x_{n_k} - x_0) \to 0$$

则 $Ax_{n_k} \xrightarrow{w} Ax_0 \Rightarrow Ax_0 = y \Rightarrow ||Ax_{n_k} - Ax_0|| \to 0$，矛盾。

对于 2，设 $\{x_n\}$ 有界，由定理 2.8.18(Eberlein-Smulian)，$X$ 自反 $\Rightarrow$ 有子列 $x_{n_k} \xrightarrow{w} x_0$，$A$ 全连续 $\Rightarrow ||Ax_{n_k} - Ax_0|| \to 0$.

### 3.2.2 Riesz-Fredholm 定理

**定义 3.2.2**

对于 $\mathcal{F} \subset X^*$，

$$\mathcal{F}^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{F}\}$$

称之为 $\mathcal{F}$ 在 $X$ 中的零化子。

**定理 3.2.2 (Riesz-Fredholm)**

设 $A \in \mathcal{T}(X)$，$T = I - A$，则

1. $\dim(\mathrm{Ker}(T)) < \infty$.
2. $\mathrm{Ran}(T)$ 闭。
3. Fredholm Alternative，二择一律：$T$ 单 $\Leftrightarrow T$ 满。
4. $\mathrm{Ran}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$.
5. $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T^*))$.

证明 1. 记 $M = \mathrm{Ker}(T)$，$S_M$ 为 $M$ 中的单位球面，$S_X$ 为 $X$ 中的单位球面，于是

$$x \in S_M \Leftrightarrow x \in S_X, (I - A)x \in 0 \Leftrightarrow x \in S_X, x = Ax \in A(S_X)$$

所以 $S_M \subset A(S_X)$，后者列紧，从而 $S_M$ 列紧，因此 $\dim(M) < \infty$.

证明 2. 设 $\mathrm{Ran}(T) \ni y_n \to y$，其中 $y_n = Tx_n = x_n - Ax_n$.

**Case 1：** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，$A$ 紧 $\Rightarrow \{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列 $\{Ax_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，设 $Ax_{n_k} \to u$，

$$x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k} \to y + u \Rightarrow y_{n_k} = Tx_{n_k} \to T(y+u)$$
$$\Rightarrow y = T(y+u) \in \mathrm{Ran}(T)$$

**Case 2：** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无界，令 $d_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Ker}(T))$，存在 $z_n \in \mathrm{Ker}(T)$ 满足 $||x_n - z_n|| = d_n$，Claim：$\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界。假设不然，不妨 $d_n \to +\infty$，令

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x_n - z_n}{||x_n - z_n||}$$

于是

$$Tv_n = \frac{Tx_n - Tz_n}{d_n} = \frac{y_n}{d_n} \to 0$$

由于 $||v_n|| = 1$，所以 $\{Av_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有收敛子列，设 $Ax_{n_k} \to w$，则 $v_{n_k} = Av_{n_k} + Tv_{n_k} \to w$，而 $Tv_{n_k} \to 0$，所以 $Tw = 0$，$w \in \mathrm{Ker}(T)$，

$$||v_n - z|| = \frac{1}{d_n}||x_n - (z_n + d_n z)|| \geqslant \frac{d_n}{d_n} = 1$$

这与 $v_{n_k} \to w \in \mathrm{Ker}(T)$ 矛盾。从而 $\{x_n - z_n\}$ 有界且 $T(x_n - z_n) = Tx_n = y_n$，约化为 Case1.

证明 3.

**引理 3.2.1**

(1) $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(T^2) \subset \cdots$

(2) $\exists n$ s.t. $\mathrm{Ker}(T^n) = \mathrm{Ker}(T^{n+1})$.

证明 (1) 显然，只说明 (2)：假设不成立，即 $\forall n, \mathrm{Ker}(T^n) \subsetneqq \mathrm{Ker}(T^{n+1})$，由 Riesz 阴历，存在 $x_n \in \mathrm{Ker}(T^{n+1}), ||x_n|| = 1$ s.t. $\mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Ker}(T^n)) > \frac{1}{2}$.

对于 $\forall n, m$，不妨设 $n > m$，

$$T^n(Tx_n + Ax_m) = T^{n+1}x_n + T^n Ax_m = A(T^n x_m) = 0$$

所以 $Tx_n + Ax_m \in Tx_n + Ax_m(T^n)$，从而

$$||Ax_n - Ax_m|| = ||x_n - (Tx_n + Ax_m)|| > \frac{1}{2}$$

这说明 $\{Ax_n\}$ 无收敛子列，与 $A$ 紧矛盾。

假设 $T$ 满但不单，也就是 $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$，取 $0 \neq x_0 \in \mathrm{Ker}(T)$，因为 $T$ 是满射，存在 $Tx_1 = x_0$、$Tx_2 = x_1 \cdots$

$$0 \neq x_0 = Tx_1 = T^2x_2 = \cdots \Rightarrow T^n x_n \neq 0, T^{n+1}x_n = 0$$

从而 $x_n \in \mathrm{Ker}(T^{n+1}) \backslash \mathrm{Ker}(T^n)$. 这与引理矛盾。

假设 $T$ 单而不满，令 $X_1 = T(X) = \mathrm{Ran}(T)$，$X_1$ 是 $X$ 的闭真子空间，取 $X_2 = T(X_1)$，则 $X_2$ 为 $X_1$ 的闭真子空间，否则 $T(X_1) = X_1$，取 $x_0 \in X \backslash X_1$，

$$Tx_0 \in T(X) = X_1 = T(X_1) \Rightarrow Tx_0' = Tx_0$$

与 $T$ 单射矛盾，因此可以取出一系列 $X_n = T^n(X)$ 满足 $X_{n+1}$ 是 $X_n$ 的真闭子空间，由 Riesz，

$$\exists x_n \in X_n, ||x_n|| = 1 \text{ s.t. } \mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) > \frac{1}{2}$$

那么对于 $\forall n, m$，不妨 $n > m$，

$$Ax_m - Ax_n = -(x_m - Ax_m) + (x_n - Ax_n) + x_m - x_n = x_m - (x_n + Tx_n - Tx_n) \in X_{m+1}$$

于是

$$||Ax_m - Ax_n|| \geqslant \mathrm{dist}(x_m, X_{m+1}) > \frac{1}{2}$$

从而 $\{Ax_n\}$ 无收敛子列，与 $A$ 紧矛盾。

### 3.2.3 Riesz-Schauder 定理

**定理 3.2.3 (Riesz-Schauder)**

设 $A \in \mathcal{T}(X)$，则

1. 如果 $\dim(X) = \infty$，则 $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma(A)\backslash\{0\} = \sigma_p(A)\backslash\{0\}$.
3. 非零特征值的特征子空间一定是有限维的。
4. 不同特征值的特征向量线性无关。
5. 0 是 $\sigma(A)$ 的唯一可能的极限点。

**证明** 1. 假设 $0 \in \rho(A)$，则 $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$，$I = A^{-1} \circ A$ 是有界算子和紧算子的复合，也是紧算子，从而 $\dim(X) < \infty$.

**证明** 2. 只需证明：

$$\forall \lambda \notin \sigma_p(A), \lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$$

实际上，$\lambda \notin \sigma_p(A) \Rightarrow \lambda I - A$ 单，由 F.A.$\Rightarrow$ $\lambda I - A$ 是双射，由 IMT$\Rightarrow$ $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

**证明** 3. 对于 $\forall 0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$，

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - A) = \mathrm{Ker}(I - \frac{1}{\lambda}A) \overset{\text{Riesz}-\text{Fredholm}}{\Rightarrow} \dim(\lambda I - A) < \infty$$

**证明** 5. 假设 $\sigma(A)$ 有极限点 $\lambda_0 \neq 0$，则存在 $\lambda_n \in \sigma(A)$ 使得 $\lambda_n \to \lambda_0$. 不妨设 $\{\lambda_n\}$ 互不相同，$\lambda_0 \Rightarrow n$ 充分大时 $\lambda_n \neq 0$，故不妨设所有 $\lambda_n \neq 0$.

$$\frac{1}{\lambda_n} \to \frac{1}{\lambda_0} \Rightarrow \sup_n \left|\frac{1}{\lambda_n}\right| < \infty$$

取 $x_n \in \mathrm{Ker}(\lambda_n I - A)$，由 4. 可得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 线性无关，令 $X_n \overset{\text{def}}{=} \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$，则 $X_n$ 是 $X_{n+1}$ 的真闭子空

间，由 Riesz 引理 $\Rightarrow \exists y_n \in X_n, ||y_n|| = 1$ 使得

$$\mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

而

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \Rightarrow (\lambda_n I - A)y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\lambda_n - \lambda_k)x_k$$

对于 $\forall n, m$，不妨 $n > m$，

$$\left\| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| = \left\| y_n - \underbrace{\left[y_n - A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\right]}_{\in X_{n-1}} - \underbrace{\left[A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right)\right]}_{\in X_m \subset X_{n-1}} \right\| \geqslant \mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2}$$

另一方面，$\{\frac{y_n}{\lambda_n}\}$ 是有界集，从而 $\{A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)\}$ 有收敛子列，矛盾。

**推论 3.2.1**

$A \in \mathcal{T}(X) \Rightarrow \sigma(A)$ 至多可数。

**证明** 令

$$E_k \overset{\text{def}}{=} \sigma_p(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \frac{1}{k}\}$$

则

$$\sigma(A) \backslash \{0\} = \sigma_p(A) \backslash \{0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

只需证明 $E_k$ 元素个数有限。假设不然，由 B-W$\Rightarrow$ $E_k$ 有极限点，而且 $\mathrm{dist}(0, E_k) \geqslant \frac{1}{k}$，从而 $\lambda_0 \neq 0$，但 $\sigma(A)$ 只可能以 0 作为极限点，矛盾。

**推论 3.2.2**

如果 $X$ 无穷维，$A \in \mathcal{T}(X)$，则只有三种情形：

(1). $\sigma(A) = \{0\}$，例如取 $A = 0$.

(2). $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

(3). $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 且 $\lambda_n \to 0$.

这里面的 $\lambda_i \in \sigma_p(A)$.

**证明** 令

$$F_0 \overset{\text{def}}{=} \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geqslant 1\}$$

$$F_k \overset{\text{def}}{=} \sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{k+1} \leqslant |\lambda| < \frac{1}{k}\}, k = 1, 2, \cdots$$

则 $\sigma(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$，且 $F_k$ 中元素个数有限，则按照 $F_k$ 顺次排列 $\lambda_1, \lambda_2$ 即可。

**例 3.2.3.**

给定 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$，令

$$A_n : \ell^2 \to \ell^2, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n, 0, \cdots)$$

则 $A_n$ 是有界有限秩算子，从而是紧算子，且

$$\{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \sigma_p(A)$$

而 $\forall\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ 有：

$$\begin{aligned}(\lambda I-A_n)x=0 \Leftrightarrow &((\lambda-\lambda_1)x_1,\cdots,(\lambda-\lambda_n)x_n,\lambda x_{n+1},\cdots)=0\\ \Leftrightarrow &x=0\\ \Rightarrow &\lambda I-A_n\text{单}\\ \Rightarrow &\lambda I-A_n\text{是双射}\\ \Rightarrow &\lambda\in\rho(A_n)\Rightarrow\sigma(A_n)=\sigma_p(A_n)=\{0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\end{aligned}$$

**例 3.2.4.**

设 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}\backslash\{0\}$，$\lambda_n\to0$，

$$A:\ell^2\to\ell^2,(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots)$$

则根据收敛列有界，$A$ 是有界算子。同时

$$||A-A_n||=\sup||x||_2=1\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\lambda_k|^2|x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to0$$

$A_n$ 是紧算子 $\Rightarrow$ $A$ 是紧算子（经典方法）。

考虑 $Ae_k=\lambda_ke_k$，$\{\lambda_k\}\subset\sigma_p(A)$，而且 $0\notin\sigma_p(A)$.

$$\forall\lambda\in\backslash\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}\Rightarrow\inf_k|\lambda-\lambda_k|>0$$

令

$$T:\ell^2\to\ell^2,(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(\frac{x_1}{\lambda-\lambda_1},\frac{x_2}{\lambda-\lambda_2},\cdots)$$

则 $T=(\lambda I-A)^{-1}$，且

$$||Tx||_2\leqslant||x||_2\cdot\sup_k\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|}$$

于是 $T\in\mathcal{L}(X)$，从而 $\lambda\in\rho(A)$，这说明 $\sigma(A)=\{0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$.

# 第 4 章 作业汇总

部分作业是课上某个定理、推论、命题或其中一个步骤的证明，就直接抄录在笔记里了。本章内容 = 课后作业 ∩ 课本习题。

## 4.1 第一章

**题目 1.**(1.1.1) 完备度量空间的闭子空间也是完备的；任一度量空间的完备子空间一定是闭子空间。

**解答**：Show answer

(1) 设 $E$ 是完备度量空间 $X$ 的闭子集，由于 $X$ 是完备的，所以 $E$ 上任意柯西列都在 $X$ 上收敛，且由 $E$ 是闭集 $\Rightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$，如果 $x_n \to x_0$，则 $x_0 \in E$，所以 $E$ 上任意柯西列都在 $E$ 上收敛，故 $E$ 是完备子空间。

(2) 设 $E$ 是度量空间 $X$ 的完备子空间，设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $X$ 上的收敛列，且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$，那也一定是柯西列，故在 $E$ 上收敛，即 $x_n \to x_0 \in E$，故 $E$ 是闭集。

**题目 2.**(1.2.1) $S$ 为复数列全体构成的集合，定义距离为

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

其中 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_k, \cdots)$，$y = (\eta_1, \cdots, \eta_k, \cdots)$. 求证：$(S, \rho)$ 为完备度量空间。

**解答**：Show answer

先验证 $\rho$ 是距离函数：

$1^\circ$ 非负性：$\forall x, y, \rho(x,y) \geqslant 0$ 成立，因为每一项都非负。

$2^\circ$ 唯一性：$\rho(x,y) = 0 \Rightarrow \forall k, |\xi_k - \eta_k| = 0 \Rightarrow x = y$.

$3^\circ$ 对称性：由 $|\xi_k - \eta_k| = |\eta_k - \xi_k|$ 可得。

4° 三角不等式：设 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$，

$$\frac{t}{1+t}\nearrow \text{ on } (0,\infty)\Rightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$
$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

所以

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|}{1+|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\\&=\rho(x,z)+\rho(y,z)\end{aligned}$$

下面证明完备性：设 $\{x^{(n)}\}$ 是 $S$ 中的柯西列，其中 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots)$，则

$$\rho(x^{(n+p)}-x^{(n)})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|}\to 0 \text{ as } n\to\infty,\forall p\in\mathbb{N}$$

对于每个 $k$，取 $N_k$ 使得 $n>N_k$ 时有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n+p)}-x_i^{(n)}|}{1+|x_i^{(n+p)}-x_i^{(n)}|}<\frac{1}{2^{k+1}}\varepsilon$$

左侧取级数的第 $k$ 项，

$$\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|}<\frac{1}{2^{k+1}}\varepsilon$$

$\Rightarrow |x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|<\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0$，可知

$$|x_k^{(n+p)}-x_k^{(n)}|\to 0 \text{ as } n\to 0,\forall p,k\in\mathbb{N}$$

这意味着每个 $x^{(n)}$ 的第 $k$ 个坐标组成 $\mathbb{C}$ 上的柯西列，由 $\mathbb{C}$ 的完备性可知其收敛，并设 $x_k^{(n)}\to x_k^*$，令

$$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots)\in S$$

下面证明 $x^{(n)}\to x^*$，

$$\begin{aligned}\rho(x^{(n)},x^*)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k^*|}{1+|x_k^{(n)}-x_k^*|}\\&=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k^*|}{1+|x_k^{(n)}-x_k^*|}+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k^*|}{1+|x_k^{(n)}-x_k^*|}\\&<\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}|x_k^{(n)}-x_k^*|+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\\&=\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}|x_k^{(n)}-x_k^*|+2^{-n_0}\end{aligned}$$

对每个 $k$，存在 $N_k$ 使得 $n>N_k$ 时 $|x_k^{(n)}-x_k^*|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是取 $N=\max\{N_1,\cdots,N_{k_0}\}$，$n>N$ 时

$$\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}|x_k^{(n)}-x_k^*|<\sum_{k=1}^{k_0}\frac{1}{2^k}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

再取充分大的 $n_0$ 使得 $2^{-n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$，得到 $\rho(x^{(n)},x^*)<\varepsilon$，由 $\varepsilon$ 的任意性可知 $\rho(x^{(n)},x^*)\to 0$，完备性得证。

**题目 3.**(1.2.2) 度量空间上的基本列是收敛列当且仅当它存在一列收敛子列。

**解答：** Show answer

必要性显然，只说明充分性：设 $\{x_n\}$ 是基本列，且存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，并设 $x_{n_k}\to x$. 任意 $\varepsilon>0$，存在 $N$ 使得 $n,m>N$ 时

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$$

存在 $K$ 使得 $k>K$ 时 $n_k>N$，故

$$\rho(x_n,x_{n_k})<\varepsilon,\forall n>N,k>K$$

上式中 $k\to\infty$ 可得 $\rho(x_n,x)\leqslant\varepsilon$，由 $\varepsilon$ 任意性可知 $x_n\to x$，故 $\{x_n\}$ 为收敛列。

**题目 4.**(1.2.3) $F$ 是只有有限项不为 0 的实数列全体构成的集合，定义距离为

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_k,\cdots)$. 求证：$(F,\rho)$ 不是完备度量空间，并指出其完备化。

**解答：** Show answer

令 $x^{(n)}=(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},0,0,\cdots)\in F$，$m>n$ 时，

$$x^{(n)}-x^{(m)}=(0,0,\cdots,0,\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\cdots,\frac{1}{m},0,0,\cdots)$$

所以

$$\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\frac{1}{n+1}\to 0\text{ as }n\to\infty$$

于是 $\{x^{(n)}\}$ 是柯西列，假设它收敛到 $x\in F$，$x$ 只有有限项不为零，假设其从第 $N$ 项开始全部是 0，则 $\rho(x^{(n)},x)\geqslant\frac{1}{N},\forall n>N$，矛盾。所以 $F$ 不完备。

收敛到 0 的实数列全体为 $F$ 的完备化，记作 $l_0^\infty$，证明如下：

先证明完备性，$l_0^\infty$ 上的距离也定义为

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|$$

设 $\{x^{(n)}\}$ 是柯西列，其中 $x^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$，$\xi_k^{(n)}\to 0\text{ as }k\to 0$. 注意到

$$\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon\Rightarrow\forall k\geqslant 1,|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon$$

因此对于每个 $k$，$\{\xi_k^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 上的柯西列，由 $\mathbb{R}$ 的完备性可知其为收敛列，设 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k$，并令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$.

$$|\xi_k|\leqslant|\xi_k-\xi_k^{(n)}|+|\xi_k^{(n)}-\xi_j^{(n)}|+|\xi_j^{(N)}|$$

由于 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k$，可以取充分大的 $n$ 使得右边第一项 $<\varepsilon/3$；$\{\xi_k^{(n)}\}$ 是柯西列，可以取充分大的 $k,j$ 使得右边第二项 $<\varepsilon/3$；有定义 $\xi_j^{(N)}\to 0\text{ as }j\to 0$，可以取充分大的 $j$ 使得右边第三项 $<\varepsilon/3$. 因此得到 $|\xi_k|<\varepsilon$，由 $\varepsilon$ 的任意性可得 $\xi_k\to 0\Rightarrow x\in F$，现只需说明 $x_n\to x$.

$$\rho(x_n,x)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|$$

由于 $\xi_k^{(n)}\to 0$，$\xi_k\to 0$，任意 $\varepsilon>0$，可以取充分大的 $K$，使得 $k>K$ 时 $|\xi_k^{(n)}-\xi_k|\leqslant|\xi_k^{(n)}|+|\xi_k|\leqslant 2\varepsilon$，不妨设 $|\xi_1^{(n)}-\xi_1|=\varepsilon>0$，则 $\rho(x_n,x)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant K}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|$，而这有限的 $K$ 项每一项都趋于 0，$\forall\varepsilon_0>0$，可以取充分大的 $N$ 使得 $n>N$ 时

$$\rho(x_n,x)=\max_{1\leqslant k\leqslant K}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\varepsilon_0$$

因此 $x_n\to x$.

最后说明 $F$ 是稠密子空间，实际上 $\forall x=(\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l_\infty^0$，令 $x_n\in F$ 的前 $n$ 项与 $x$ 相同，其余为 0，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n+1}|\xi_k|=0$$

**题目 5.**(1.2.4) $[0,1]$ 上的多项式全体记作 $P[0,1]$，定义距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$$

求证：$(P[0,1],\rho)$ 不是完备度量空间，并指出其完备化。

**解答：** Show answer

设

$$p_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!},n\in\mathbb{N}_+$$

则

$$\rho(p_n(x),p_{n+k}(x))=\int_0^1\sum_{i=n+1}^{n+k}\frac{x^i}{i!}\mathrm{d}x=\sum_{i=n+1}^{n+k}\frac{1}{(i+1)!}\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{n+1}\to 0$$

所以 $p_n(x)$ 是基本列，而

$$\rho(p_n(x),\mathrm{e}^{\mathrm{x}})=\int_0^1\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\mathrm{d}x=\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)!}\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{n+1}\to 0$$

说明 $p_n(x)\xrightarrow{\rho}\mathrm{e}^x$，这意味着如果 $P[0,1]$ 完备，则 $\mathrm{e}^x$ 是有限次多项式，矛盾。

$L^1[0,1]$ 是 $P[0,1]$ 的完备化。

**题目 6.**(1.3.1) 在完备度量空间中，子集 $A$ 列紧的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，存在 $A$ 的列紧的 $\varepsilon$ 网。

**解答：** Show answer

必要性：列紧 $\Rightarrow$ 完全有界，所以 $\forall\varepsilon>0$，存在 $A$ 的有限 $\varepsilon$ 网，有限集是列紧的（因为有限集的无穷点列中一定能取出全由某个特定元素组成的点列，进而收敛），所以也是列紧 $\varepsilon$ 网。

充分性：设 $N$ 为 $A$ 的列紧的 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网，

$$\forall x\in A,\exists\xi\in N\text{ s.t. }\rho(x,\xi)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$N$ 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界，设 $N_0$ 是 $N$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{2}$ 网，则对于 $\xi$，$\exists x_0\in N_0$ s.t. $\rho(\xi,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$\rho(x,x_0)\leqslant\rho(x,\xi)+\rho(\xi,x_0)<\varepsilon$$

所以 $N_0$ 是 $A$ 的有穷 $\varepsilon$ 网，所以 $A$ 完全有界，完备度量空间所以 $A$ 列紧。

**题目 7.**(1.3.2) 度量空间中，紧集上的连续函数一定有界，且能够达到上、下确界。

**解答：** Show answer

假设 $f(x)$ 无上界，则存在 $\{x_n\}\subset M$ 使得 $f(x_n)>n$，由于 $M$ 是紧集，所以自列紧，所以存在子列 $x_{n_k}\to x_0\in M$，$f$ 连续所以 $f(x_{n_k})\to f(x_0)$，这与 $f(x_n)\to\infty$ 矛盾。所以 $f(x)$ 有上界，同理可证 $f(x)$ 有下界，故 $f$ 有界。

设 $\beta=\sup\limits_{x\in M}f(x)$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $x_\varepsilon\in M$，$f(x_\varepsilon)>\beta-\varepsilon$，取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，得到点列 $\{x_n\}$，有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设其收敛到 $x_0\in M$，于是

$$\beta-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant\beta$$

上式 $k\to\infty$ 可得

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\beta$$

同时，因为 $f$ 连续，

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

因此 $f(x_0)=\beta$，能达到上确界。下确界同理。

**题目 8.**(1.3.4) $(X,\rho)$ 是度量空间，$F_1,F_2$ 是 $X$ 的两个紧子集，求证：$\exists x_i\in F_i$，使得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$，其中

$$\rho(F_1,F_2):=\inf\{\rho(x,y)|x\in F_1,y\in F_2\}$$

**解答：** Show answer

设 $\rho(F_1,F_2)=d$，由 *inf* 的定义，

$$\forall n\in\mathbb{N},\exists x_n\in F_1,y_n\in F_2 \text{ s.t. } d\leqslant\rho(x_n,y_n)<d+\frac{1}{n}$$

$F_1$ 紧则自列紧，$\{x_n\}$ 存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛到 $x'\in F_1$，相应的 $\{y_{n_k}\}$ 有子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$ 收敛到 $y'\in F_2$，于是

$$d\leqslant\rho(x_{n_{k_j}},y_{n_{k_j}})<d+\frac{1}{n_{k_j}}$$

令 $j\to 0$，得 $d=\rho(x',y')$.

**题目 9.**(1.3.6) $E=\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$，证明 $E\subset C[0,\pi]$ 不是列紧的。

**解答：** Show answer

只需证明 $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 不是等度连续的。对 $\varepsilon_0=1,\forall\delta>0$，取 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{k}<\delta$，设 $n_k=2k,t_k=\frac{\pi}{4k}\in[0,\pi]$，于是

$$|t_k-t_0|=|t_k|=\frac{\pi}{4k}<\frac{1}{k}<\delta$$

$$|\sin n_kt_k-\sin n_kt_0|=\sin\frac{\pi}{2}=1=\varepsilon_0$$

所以 $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ 不是等度连续的。

**题目 10.**(1.3.7) $S$ 空间的子集 $A$ 列紧的充要条件是 $\forall n\in\mathbb{N},\exists C_n>0 \text{ s.t. } \forall x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in A,|\xi_n|\leqslant C_n$.

**解答：** Show answer

必要性：$A$ 在 $S$ 中列紧，任取无穷点列 $\{\xi^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}\subset A$ 有收敛子列 $\{\xi^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$，而 $S$ 中的收敛与按坐标收敛等价，所以固定 $m$，点列 $\{\xi^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 中的每一个点的坐标序列 $\{\xi_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ 也可以从其任意无穷子集中取出收敛子列。固定 $n$，$A$ 中所有点的第 $n$ 个坐标构成 $\mathbb{C}$ 上的集合，要从其任意无穷子集中取出收敛子序列要求该集合有界，此即为要求所证。

充分性：只需构造 $A$ 的列紧 $\varepsilon$ 网。对 $\forall\varepsilon>0$，选取充分大的 $n$ 使得 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，考虑

$$H=\{h_n=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,\cdots):(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi_{n+1},\cdots)\in A\}$$

因为

$$\rho(x,h_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k|}{1+|\xi_k|}\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon$$

所以 $H$ 是 $A$ 的 $\varepsilon$ 网。由假设

$$|\xi_k|\leqslant C_k,\ k=1,2,\cdots,n$$

即每个坐标都是有界的，所以 $H$ 可看做是 $n$ 维空间中的有界集，从而是列紧的.

**题目 11.**(1.3.9) $(M,\rho)$ 是紧度量空间，$E\subset C(M)$，$E$ 中的函数一致有界并且满足：

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^\alpha\ (\forall x\in E,\forall t_1,t_2\in M)$$

其中 $0<\alpha\leqslant 1,C>0$，求证 $E\subset C(M)$ 是列紧集。

**解答：** Show answer

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，当 $\rho(t_1,t_2)<\delta$ 时，$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant C\rho(t_1,t_2)^\alpha<\varepsilon$，所以 $E$ 是等度连续的，再由 Argela-Ascoli 定理可得列紧。

**题目 12.**(1.4.2) $\forall x\in C(0,1]$，令 $||x||=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|$，求证：

1. $||\cdot||$ 是 $C(0,1]$ 上的范数；
2. $l^\infty$ 与 $C(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的。

**解答：** Show answer

$||\cdots||$ 是 $C(0,1]$ 上的范数：

(1) 正定性：绝对值非负所以 $||x||\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $x(t)=0$ on $(0,1]$.

(2) 齐次性：$||Cx||=\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|Cx(t)|=C\sup\limits_{0<t\leqslant 1}|x(t)|=C||x||$.

(3) 三角不等式：

$$\begin{aligned}||x+y||&=\sup_{0<t\leqslant 1}|x(t)+y(t)|\\&\leqslant\sup_{0<t\leqslant 1}(|x(t)|+|y(t)|)\\&\leqslant\sup_{0<t\leqslant 1}|x(t)|+\sup_{0<t\leqslant 1}|y(t)|=||x||+||y||\end{aligned}$$

以 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 为节点的全体折线函数，构成 $C(0,1]$ 的子空间，记作 $C'(0,1]$.

$$\forall f\in C'(0,1],x_f\overset{\text{def}}{=}\{f(\frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty\in l^\infty,||x_f||_\infty=\max_{n\geqslant 1}||f(\frac{1}{n})||\leqslant||f||$$

反之，设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^\infty$，取一个以 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 为节点的折线函数 $f_x\in C(0,1]$，并令 $f_x(\frac{1}{n})=\xi_n$，于是

$$||f_x||\leqslant\max_{n\geqslant 1}||\xi_n||=||x||_\infty$$

**题目 13.**(1.4.3) $\forall f\in C^1[a,b]$，令

$$||f||_1=\left(\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明 $||\cdot||_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数，在该范数下是否完备？

**解答：** Show answer

$||\cdot||_1$ 是 $C^1[a,b]$ 上的范数：

(1) 正定性：$||f||_1\geqslant 0$，等号成立当且仅当 $|f(x)|^2=0,\forall x\in[a,b]$ 当且仅当 $f(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

(2) 齐次性：

$$||Cf||_1=\left(\int_a^b(|Cf|^2+|Cf'|^2)\right)^{\frac{1}{2}}=C||f||_1$$

(3) 三角不等式：

$$\begin{aligned}||f+g||_1^2 &= \int_a^b (|f|^2+|f'|^2) + \int_a^b (|g|^2+|g'|^2) \\ &\leqslant \int_a^b (|f|^2+|f'|^2) + \int_a^b (|g|^2+|g'|^2) + 2\left(\int_a^b (|f|^2+|f'|^2)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (|g|^2+|g'|^2)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (||f||_1+||g||_1)^2\end{aligned}$$

$(C^1[a,b],||\cdot||_1)$ 不完备，取

$$f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}\in C^1[-1,1]$$

设 $f_n \overset{||\cdot||_1}{\to} f\in C^1[a,b]$，则 $f'n \overset{L_2}{\to} f'$，又有：$||f_n-|x|||_1\to 0$，故

$$f_n' \overset{L_2}{\to} -\chi_{[-1,0)}+\chi_{[0,1]}$$

$L_p$ 收敛则存在子列 a.e. 收敛，于是 $f' \overset{a.e.}{=} -\chi_{[-1,0)}+\chi_{[}0,1]$，这与 $f'$ 连续矛盾。

**题目 14.**(1.4.4) $\forall f\in C[0,1]$，令：

$$||f||_1=\left(\int_0^1 |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$||f||_2=\left(\int_0^1 (1+x)|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

证明两个范数等价。

**解答：** Show answer

$1\leqslant 1+x\leqslant 2\Rightarrow ||f||_1\leqslant ||f||_2\leqslant \sqrt{2}||f||_1$，故为等价范数。

**题目 15.**(1.4.5) $BC[0,\infty)$ 代表 $[0,\infty)$ 上连续有界函数全体，$\forall x\in BC[0,\infty), a>0$，定义

$$||f||_a=\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

求证：

1. $||\cdot||_a$ 是 $BC[0,\infty)$ 上的范数；
2. 若 $a,b>0, a\neq b$，求证两个范数不等价。

**解答：** Show answer

$||\cdot||_a$ 是 $BC[0,+\infty)$ 上的范数：

(1) 正定性：$||f||_a\geqslant 0$，等号成立当且仅当（因为 $\mathrm{e}^{-ax}|f(x)|^2$ 非负连续）$\mathrm{e}^{-ax}|f(x)|^2=0\Leftrightarrow f(x)=0.$

(2) 齐次性：

$$||Cf||_a=\left(C^2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=C||f||_a$$

(3) 三角不等式：

$$||f+g||_a=||\mathrm{e}^{-ax}(f+g)||_{L_2}\leqslant ||\mathrm{e}^{-ax}f||_{L_2}+||\mathrm{e}^{-ax}g||_{L_2}\leqslant ||f||_a+||g||_a$$

不妨设 $b>a>0$，设

$$f_n(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{ax}{2}} & ,x\in[0,n]\\ \sqrt{-x+n+\mathrm{e}^{-an}} & ,x\in(n,n+\mathrm{e}^{-an}]\\ 0 & ,x\in(n+\mathrm{e}^{-\frac{an}{2}},+\infty)\end{cases}$$

则 $||f_n(x)||_a \geqslant n$ 发散，而

$$\begin{aligned}||f_n(x)||_b &= \int_0^n \mathrm{e}^{-(a+b)x}\mathrm{d}x + \int_n^{n+\mathrm{e}^{-an}} \mathrm{e}^{-bx}(-x+b+\mathrm{e}^{-an})\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{a+b}(\mathrm{e}^{-(a+b)n}-1) + \underbrace{\int_n^{n+\mathrm{e}^{-an}}}_{\leqslant \mathrm{e}^{-an}} \underbrace{\mathrm{e}^{-bx}(-x+b+\mathrm{e}^{-an})}_{\max\limits_{n\leqslant x\leqslant n+\mathrm{e}^{-an}} \mathrm{e}^{-bx}(-x+b+\mathrm{e}^{-an})\to 0}\mathrm{d}x \\ &\to \frac{1}{a+b}\end{aligned}$$

所以两个范数不等价。

**题目 16.**(1.4.6) 两个 Banach 空间 $(X_1, X_2)$ 的乘积空间上赋予范数

$$||(x_1, x_2)|| = \max(||x_1||_1, ||x_2||_2)$$

证明乘积空间仍然是 Banach 空间。

**解答：** Show answer

任取 $\mathfrak{X}$ 中的柯西列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$，则 $\{x_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathfrak{X}_i$ 中的柯西列 $(i=1,2)$，存在唯一 $x_i \in \mathfrak{X}_i$ 使得 $x_i^{(n)} \overset{||\cdot||_i}{\to} x_i$，于是

$$||x^{(n)} - (x_1, x_2)|| = \max(||x_1^{(n)} - x_1||_1, ||x_2^{(n)} - x_2||_2) \to 0$$

即 $x^{(n)} \overset{||\cdot||}{\to} (x_1, x_2)$.

**题目 17.**(1.4.7) $X$ 是 $B^*$ 空间，求证：$X$ 是 Banach 空间的充要条件为：

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X, \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n\text{收敛}$$

**解答：** Show answer

必要性：设 $a_n = \sum_{k=1}^n x_k$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N$，使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon$$

则 $n > N$ 时，任意正整数 $p$，

$$||a_{n+p} - a_n|| = \left|\left|\sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} x_k\right|\right| \leqslant \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} ||x_k|| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} ||x_n|| < \varepsilon$$

所以 $\{a_n\}$ 是柯西列，进而收敛。

充分性：任取柯西列 $\{x_n\}$，由习题 1.2.2，只需证明其存在收敛子列。由柯西列的定义，

$$\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists n_k \text{ s.t. } ||x_{n_k+1} - x_{n_k}|| < \frac{1}{2^k}$$

令 $y_k = x_{n_k}$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||y_{i+1} - y_i|| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

故 $\sum_{i=1}^{\infty} y_{i+1} - y_i$ 收敛，于是 $y_k = y_1 + \sum_{i=1}^{k} y_{i+1} - y_i$ 在 $k \to \infty$ 时收敛，此即为 $\{x_n\}$ 的收敛子列。

**题目 18.**(1.4.14) $C_0$ 为以 0 为极限的实数全体，赋予范数：

$$||x|| = \max_{n\geqslant 1} |\xi_n|, \forall x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in C_0$$

设

$$M=\left\{x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in C_0\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n}{2^n}=0\right\}$$

证明：

1. $M$ 是 $C_0$ 的闭线性子空间；
2. $x_0=(2,0,\cdots,0,\cdots)$，求证：

$$\inf_{z\in M}||x_0-z||=1$$

但是 $\forall y\in M$ 有 $||x_0-y||>1$.

**解答：** Show answer

(1) 先证明 $M$ 是线性子空间，只需说明 $M$ 中的元素关于 $\mathbb{R}$ 上的加法和数乘封闭：$\forall x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in M,\lambda\in\mathbb{R}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n+y_n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}=0\Rightarrow x+y\in M$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda x_n}{2^n}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}=0\Rightarrow \lambda x\in M$$

再证明 $M$ 是闭子空间：设 $x^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in M$，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots)$，且 $x^{(n)}\to x$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|=0$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\text{ s.t. }\forall n>N,\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\varepsilon$$

则

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}\right|\right|&=\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-\xi_k^{(N)}}{2^k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k^{(N)}}{2^k}\right|\right|\\&=\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-\xi_k^{(N)}}{2^k}\right|\right|<\varepsilon\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k}{2^k}=0\Rightarrow x\in M$，从而 $M$ 是 $C_0$ 的闭线性子空间。

(2) $\forall y=(y_1,\cdots,y_k,\cdots)\in M$，假设 $||x_0-y||\geqslant 1$，即

$$|2-y_1|\leqslant 1,|y_2|\leqslant 1,\cdots,|y_n|\leqslant 1,\cdots$$

于是 $y_1\geqslant 1$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{2^k}=\frac{y_1}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{y_k}{2^k}\geqslant\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=0$$

$y\in M$ 则上述不等式等号成立，意味着 $y_1=1,y_k=-1,k\geqslant 2$，则 $y\notin C_0$，矛盾。所以 $\forall y\in M,||x_0-y||<1$.

取 $x^{(m)}=(\underset{1}{1-\frac{1}{2^{m-1}}},\underset{2}{-1},\cdots,\underset{m}{-1},0,0,\cdots)\in M$，则 $\rho(x_0,x^{(m)})=1+\frac{1}{2^{m-1}}$，于是

$$1\leqslant\inf_{z\in M}||x_0-z||\leqslant 1+\frac{1}{2^{m-1}}$$

令 $m\to\infty$ 得到

$$\inf_{z\in M}||x_0-z||=1$$

**题目 19.**(1.4.15) 设 $X$ 是 $B^*$ 空间，$M$ 是 $X$ 的有限维真子空间，求证：$\exists y\in X,||y||=1$，使得 $\forall x\in M,||y-x||\geqslant 1$.

**解答：** Show answer

$M$ 是有限维子空间，所以闭，进而 $\forall y_0 \in X\backslash M$，$d \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{x\in M} ||y_0 - x|| > 0$，于是

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \exists x_n \in M \text{ s.t. } d \leqslant ||y_0 - x_n|| < d + \frac{1}{n}$$

那么 $||x_n|| \leqslant ||y_0 - x_n|| + ||y_0|| \leqslant ||y_0|| + d + 1$，即 $\{x_n\}$ 有界，$M$ 有限维所以有收敛子列 $x_{n_k}$，设 $x_{n_k} \to x_0 \in M$，

$$d \leqslant ||y_0 - x_{n_k}|| < d + \frac{1}{n_k} \Rightarrow ||y_0 - x_0|| = d$$

令 $y = \frac{y_0 - x_0}{d}$，则 $||y|| = 1$，对于 $\forall x \in M$，

$$||y - x|| = \left|\left|\frac{y_0 - x_0}{d} - x\right|\right| = \frac{1}{d}\left|\left|y_0 - \underbrace{(x_0 + dx)}_{\in M}\right|\right| \geqslant \frac{d}{d} = 1$$

**题目 20.**(1.6.2) 求证 $C[a,b]$ 中的范数：

$$||f|| = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|$$

不可能由内积诱导。

**解答：** Show answer

只需给出不满足平行四边形法则的例子，如下：取 $[a,b] = [0,1]$，$f(x) = \frac{1}{2}$，$g(x) = x$，则

$$||f + g||^2 + ||f - g||^2 = \frac{5}{2}$$
$$2(||f||^2 + ||g||^2) = 3$$

**题目 21.**(1.6.4) $M, N$ 是内积空间中的两个子集，求证：

$$M \subset N \Rightarrow N^{\perp} \subset M^{\perp}$$

**解答：** Show answer

$\forall x \in N^{\perp}, m \in M \subset N \Rightarrow \langle x, m, = \rangle 0 \Rightarrow x \in M^{\perp}$，故 $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

**题目 22.**(1.6.5) $M$ 是 Hilbert 空间的子集，求证：

$$(M^{\perp})^{\perp} = \overline{\text{span}(M)}$$

**解答：** Show answer

$x \in M^{\perp} \Leftrightarrow x \perp \text{span}(M) \Leftrightarrow x \perp \overline{\text{span}(M)} \Leftrightarrow x \in (\text{span}(M))^{\perp}$，所以 $M^{\perp} = (\text{span}(M))^{\perp}$，即证

$$[(\text{span}(M))^{\perp}]^{\perp} = \overline{\text{span}(M)}$$

只需证明，对于闭子空间 $M$，有 $(M^{\perp})^{\perp} = M$. 假设 $M \subsetneqq (M^{\perp})^{\perp}$，对于 $x \in (M^{\perp})^{\perp}\backslash M$，由正交分解

$$x = y + z,\ y \in M,\ z \in M^{\perp}$$

对于 $m \in M^{\perp}$，$y \in M \Rightarrow \langle y, m\rangle = 0$，$x \in (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow \langle x, m\rangle = 0$，所以 $\langle z, m\rangle = 0 \Rightarrow z \in (M^{\perp})^{\perp}$，于是 $z \in M^{\perp} \cap (M^{\perp})^{\perp} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in M$，矛盾。

**题目 23.**(1.6.6) $L^2[-1,1]$ 中，偶函数集的正交补是什么？

**解答：** Show answer

偶函数集记作 $X$，奇函数集记作 $Y$.

所有的奇函数 $g \in Z$ 都垂直于 $X$，因为

$$\forall f \in X, f(x)g(x)\text{为奇函数} \Rightarrow \langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f \perp g$$

所以 $Y \subset X^{\perp}$

对于 $h \in X^{\perp}$，可以分解为 $h = h_1 + h_2$，其中

$$h_1(x) = \frac{h(x)+h(-x)}{2} \in X,\ h_2(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{2} \in Y$$

则有

$$\langle h, h_1\rangle = 0 \Rightarrow \langle h_1, h_1\rangle = 0 \Rightarrow h_1 \overset{a.e.}{=} 0$$

所以 $h \in Y \Rightarrow X^{\perp} \subset Y$，于是 $Y = X^{\perp}$ 得证。

**题目 24.**(1.6.9) Hilbert 空间 $X$ 中的两个正交规范集 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||e_n - f_n||^2 < 1$$

求证：两者其中一个完备蕴含另一个完备。

**解答：** Show answer

假设 $\{e_n\}$ 完备，$\{f_n\}$ 不完备，则存在 $u \in X, u \neq 0$，使得 $\langle u, f_n\rangle = 0, \forall n$，则

$$||u||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n - f_n\rangle|^2 \leqslant \sum_{b=1}^{\infty} ||u||^2||e_n - f_n||^2 < ||u||^2$$

矛盾。

**题目 25.**(1.6.10) $X_0$ 为 Hilbert 空间 $X$ 的闭线性子空间，$\{e_n\}, \{f_n\}$ 分别是 $X_0, X_0^{\perp}$ 的正交规范基，求证：$\{e_n\} \cup \{f_n\}$ 是 $X$ 的正交规范基。

**解答：** Show answer

$X$ 是 Hilbert 空间，$X_0$ 是其闭线性子空间，所以 $X = X_0 \oplus X_0^{\perp}$，即 $\forall x \in X$，存在唯一的 $y \in X_0, \zeta \in X_0^{\perp}$ 使得 $x = y + \zeta$，而 $y$ 和 $\zeta$ 能被唯一地表示为：

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n\rangle e_n,\ \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \zeta, f_n\rangle f_n$$

同时因为 $\langle y, f_n\rangle = \langle \zeta, e_n\rangle = 0$，设 $\{e_n\} \cup \{f_n\} = \{\alpha_n\}$，则

$$y + \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, \alpha_n\rangle \alpha_n$$

所以 $\{\alpha_n\}$ 是 O.N.B.

**题目 26.**(1.6.11) 这道题要用到课本例 1.6.28 相关内容。

(1). 如果 $u(z)$ 的泰勒展开式为

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

求证：

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|^2}{1+k} < \infty$$

(2). 设 $u(z), v(z) \in H^2(D)$，并且

$$u(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ v(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

求证：

$$(u,v)=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\overline{b_k}}{k+1}$$

(3). 设 $u(z)\in H^2(D)$，求证：

$$|u(z)|\leqslant\frac{||u||}{\sqrt{\pi}(1-|z|)},\ \forall|z|<1$$

(4). 验证 $H^2(D)$ 是 Hilbert 空间。

**解答：** Show answer

*(1).* 由例 1.6.28，$\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n}{\pi}}z^{n-1}$ 是一组 O.N.B. 那么

$$u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\varphi_n(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}z^{n-1}$$

可得

$$\frac{b_k}{\sqrt{k+1}}=(u,\varphi_{k+1})\cdot\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

于是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{k+1}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}|(u,\varphi_{k+1})|^2\overset{\text{Parseval}}{=}\frac{1}{\pi}||u||^2<+\infty$$

*(2).*

$$\begin{aligned}(u,v)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\varphi_n,\sum_{m=1}^{\infty}(v,\varphi_m)\varphi_m\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(u,\varphi_n)\overline{(v,\varphi_n)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sqrt{\pi}a_k}{\sqrt{k+1}}\frac{\overline{\sqrt{\pi}b_k}}{\sqrt{k+1}}=\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k\overline{b_k}}{k+1}\end{aligned}$$

*(3).* 由

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|z|^k=\frac{1}{(1-|z|)^2},|z|<1$$

可得

$$\begin{aligned}RHS^2=\frac{||u||^2}{\pi(1-|z|)^2}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2}{k+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|z|^k\\&\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|^2|z|^k}{k+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|z|^k\\&\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}|b_kz^k|^2\geqslant|u(z)|^2=LHS^2\end{aligned}$$

*(4).* 设 $u_n$ 为 $H^2(D)$ 上的基本列，由 (3) 可知 $u_n$ 内闭一致收敛至 $u(z)$，故 $u(z)$ 全纯，且

$$|u_n(z)|-|u_m(z)|\leqslant|u_n(z)-u_m(z)|$$

故 $|u_n(z)|$ 是 $L^2(D)$ 中的基本列，由 $L^2(D)$ 的完备性，可知 $|u(z)|\in L^2(D)$，即 $u(z)\in H^2(D)$.

$$||u_n(z)-u_m(z)||_{H^2(D)}\to 0$$

令 $m \to \infty$，有 $u_n(z) \overset{H^2(D)}{\to} u(z)$.

**题目 27.**(1.6.12) $X$ 是内积空间，$\{e_n\}$ 是 $X$ 中的正交规范集，求证：

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}\right| \leqslant ||x|| \cdot ||y||,\ \forall x, y \in X$$

**解答：** Show answer

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)} \\ &= \langle\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n, \sum_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n\rangle \\ &\overset{\text{C-S}}{\leqslant} \left|\left|\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n\right|\right| \cdot \left|\left|\sum_{n=1}^{\infty}(y, e_n)e_n\right|\right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)| \cdot \sum_{n=1}^{\infty}|(y, e_n)| \\ &\overset{\text{Bessel}}{\leqslant} ||x|| \cdot ||y|| = RHS \end{aligned}$$

**题目 28.**(1.6.13) $X$ 是内积空间，令

$$C = \{x \in X : ||x - x_0|| \leqslant r\}$$

其中 $x_0 \in X, r > 0$，求证：

1. $C$ 是 $X$ 中的闭凸集；
2. $$y = \begin{cases} x_0 + r(x - x_0)/||x - x_0|| & , x \notin C \\ x & , x \in C \end{cases}$$

   是 $x$ 在 $C$ 中的最佳逼近元。

**解答：** Show answer

(1) $C$ 闭显然，只需证明为凸集：$\forall x_1, x_2 \in C, \forall \theta \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} ||\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - x_0|| &= ||\theta(x_1 - x_0) + (1-\theta)(x_2 - x_0)|| \\ &\leqslant \theta||x_1 - x_0|| + (1-\theta)||x_2 - x_0|| \\ &\leqslant \theta r + (1-\theta)r = r \\ \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C \end{aligned}$$

(2) 当 $x \notin C$，对于 $\forall z \in C$,

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= ||x - y|| + ||y - x_0|| - r \\ &= ||x - x_0|| - r \\ &\leqslant ||x - z|| + ||z - x_0|| - r \\ &\leqslant ||x - z|| \end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $z = y$，则 $||x - y|| = \inf\limits_{z \in M} ||x - z||$；当 $x \in C$ 则自身就是最佳逼近元。证毕。

# 4.2 第二章

## 4.2.1 线性算子

**题目 29.**(2.1.1) 证明：线性映射 $T: X \to Y$ 有界当且仅当 $T$ 将有界集映为有界集。

**解答：** Show answer

必要性：任取有界集 $A \subset X$，存在 $B(0,r) \supset A$，则

$$||Tx|| \leqslant C||x|| \leqslant Cr \Rightarrow Tx \in B(0,Cr) \Rightarrow T(A) \subset B(0,Cr)$$

所以 $T$ 把有界集映为有界集。

充分性：$B = \{x \in X : ||x|| \leqslant 1\}$ 是有界集，则存在 $M > 0$ 使得 $||Tx|| \leqslant M, \forall x \in B$，对于 $\forall x \in X - \{0\}$，

$$\left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \leqslant M \Rightarrow ||Tx|| \leqslant M||x||$$

因此 $T$ 有界。

**题目 30.**(2.1.2) 设线性映射 $A: X \to Y$ 有界，证明：

(1). $||A|| = \sup\limits_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||$

(2). $||A|| = \sup\limits_{||x|| < 1} ||Ax||$

**解答：** Show answer

(1) 一方面

$$\sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| \geqslant \sup_{||x||=1} ||Ax|| = ||A||$$

另一方面

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \geqslant \sup_{\substack{x \neq 0 \\ ||x|| \leqslant 1}} \frac{||Ax||}{||x||} \geqslant \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax||$$

所以二者相等。

(2) 由上一问，

$$||A|| = \sup_{||x|| \leqslant 1} ||Ax|| \geqslant \sup_{||x|| < 1} ||Ax||$$

另一方面，对于 $\forall ||x|| = 1$，$\forall \varepsilon > 0$，

$$Ax = (1+\varepsilon)A(\frac{x}{1+\varepsilon}) \leqslant (1+\varepsilon) \sup_{||x|| < 1} ||Ax||$$

即

$$||A|| \leqslant (1+\varepsilon) \sup_{||x|| < 1} ||Ax||$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得证。

**题目 31.**(2.1.5) $f$ 是 $X$ 上的非零有界线性泛函，令：

$$d = \inf\{||x|| : f(x) = 1, x \in X\}$$

证明 $||f|| = \frac{1}{d}$.

**解答：** Show answer

$$d=\inf\{||x||:f(x)=1,x\in X\}$$

一方面，若 $x\in X$ 满足 $f(x)=1$，

$$||f||\cdot||x||=||x||\cdot\sup_{0\neq z\in X}\frac{||f(z)||}{||z||}\geqslant||x||\cdot\frac{||f(x)||}{||x||}=||f(x)||=1$$
$$\Rightarrow||x||\geqslant\frac{1}{||f||}$$
$$\Rightarrow d\geqslant\frac{1}{||f||}$$

另一方面，由 $||f||$ 的定义，$\forall\varepsilon>0$，存在 $0\neq x_0\in X$ 使得

$$\frac{||f(x_0)||}{||x_0||}>||f||-\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{||f||-\varepsilon}>\left|\left|\frac{x_0}{||f(x_0)||}\right|\right|$$

而 $f\left(\frac{x_0}{||f(x_0)||}\right)=1$，所以

$$\frac{1}{||f||-\varepsilon}>\left|\left|\frac{x_0}{||f(x_0)||}\right|\right|\geqslant d$$

综上，

$$\frac{1}{||f||}\leqslant d<\frac{1}{||f||-\varepsilon}$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得证。

**题目 32.**(2.1.7) 线性映射 $T:X\to Y$，令：

$$N(T)\stackrel{\text{def}}{=}\{x\in X:Tx=0\}$$

1. 若 $T$ 有界，证明 $N(T)$ 是 $X$ 的闭线性子空间；
2. $N(T)$ 是 $X$ 的闭线性子空间能否推出 $T$ 有界？
3. 若 $f$ 是线性泛函，求证：

$$f\in X^*\Leftrightarrow N(f)\text{是闭线性子空间}$$

**解答：** Show answer

(1) $\{x_n\}\subset N(T)$，$x_n\to x$，$Tx_n=0$，$T$ 有界所以连续，令 $n\to\infty$ 得到 $Tx=0\Rightarrow x\in N(T)$，所以 $N(T)$ 闭。只需验证 $N(T)$ 关于加法和数乘封闭，

$$x_1,x_2\in N(T)\Rightarrow T(x_1+x_2)=T(x_1)+T(x_2)=0\Rightarrow x_1+x_2\in N(T)$$
$$\lambda\in\mathbb{K},x\in N(T)\Rightarrow T(\lambda x)=\lambda T(x)=0\Rightarrow\lambda x\in N(T)$$

所以 $N(T)$ 是 $X$ 的闭线性子空间。

(2) 不能，反例如下：在 $l^\infty$ 中，取 $a=(1,-1,0,0,\cdots)$，设

$$f:l^\infty\to\mathbb{R},\{x_n\}_{n=1}^\infty\mapsto\sum_{n=1}^\infty x_n$$
$$T:l^\infty\to l^\infty,\xi\mapsto\xi-f(\xi)a$$

$1^\circ$ $T$ 是线性映射：显然 $f$ 是线性映射，

$$\begin{aligned}T(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)&=\alpha\xi_1+\beta\xi_2-f(\alpha\xi_1+\beta\xi_2)a\\&=\alpha\xi_1+\beta\xi_2-[\alpha f(\xi_1)+\beta f(\xi_2)]a\\&=\alpha(\xi_1-f(\xi_1)a)+\beta(\xi_2-f(\xi_2)a)\\&=\alpha T(\xi_1)+\beta T(\xi_2),\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\xi_1,\xi_2\in l^\infty\end{aligned}$$

$2^\circ$ $N(T)=\{0\}$，为闭线性子空间：

$$\begin{aligned}\xi=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in N(T)\Leftrightarrow&\xi-(f(\xi),-f(\xi),0,0,\cdots)=0\\\Rightarrow&x_1=f(\xi),x_2=-f(\xi),x_3=0,x_4=0,\cdots\\\Rightarrow&f(\xi)=x_1+x_2=0\Rightarrow\xi=0\end{aligned}$$

$3^\circ$ $f$ 无界：只需取 $\xi_n=(1,\cdots,\underset{n}{1},0,0,\cdots)$，$||\xi_n||=1$，$f(\xi_n)/||\xi_n||=n\to\infty$.

$4^\circ$ $T$ 无界：假设有界，则

$$\begin{aligned}\xi\in l^\infty\Rightarrow&||\xi-f(\xi)a||=||T\xi||\leqslant||T||\cdot||\xi||\\\Rightarrow&|f(\xi)|=|f(\xi)|\cdot||a||\leqslant||\xi-f(\xi)a||+||\xi||\leqslant(1+||T||)||\xi||\end{aligned}$$

这意味着 $f$ 有界，矛盾。

(3) (1) 已经证明必要性，只需说明充分性：假设 $f$ 无界，即

$$\forall n\in\mathbb{N}_+,\exists x_n\in X\text{ s.t. }||x_n||=1,f(x_n)\geqslant n$$

令

$$y_n\overset{\text{def}}{=}\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}$$

则 $f(y_n)=1-1=0\Rightarrow y_n\in N(f)$，但是 $y_n\to-\frac{x_1}{f(x_1)}\notin N(f)$，这与 $N(f)$ 闭矛盾。

**题目 33.**(2.1.8) $f$ 是 $X$ 上的线性泛函，记

$$H_f^\lambda\overset{\text{def}}{=}\{x\in X:f(x)=\lambda\}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{K}$，如果 $f\in X^*$，且 $||f||=1$，求证：

(1). $|f(x)|=\inf\{||x-z||:\forall z\in H_f^0\}$，$\forall x\in X$.

(2). $\forall\lambda\in\mathbb{K}$，$H_f^\lambda$ 上的任一点 $x$ 到 $H_f^0$ 的距离都等于 $|\lambda|$.

并对 $X=\mathbb{R}^2,\mathbb{K}=\mathbb{R}$ 的情形解释上述命题的几何意义。

**解答：** Show answer

(1) 记 $d=\inf\{||x-z||:\forall z\in H_f^0\}$，一方面，对于 $\forall z\in H_f^0$，

$$|f(x)|=|f(x-z)|\leqslant||f||\cdot||x-z||=||x-z||$$

所以 $|f(x)|\leqslant d$；另一方面，$\forall y\in X$ 满足 $||y||=1$ 且 $f(y)\neq0$，有

$$z=x-\frac{f(x)}{f(y)}y\in N(f)$$

而

$$|f(x)|=|f(y)|\cdot||x-z||\geqslant|f(y)|d$$

于是

$$|f(x)|\geqslant||f||d=d$$

(2) 对于 $\forall x\in H_f^\lambda$，有 $f(x)=\lambda$，由上一问可知

$$|\lambda|=\rho(x,H_f^0)$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中，由 $||f||=1$ 知 $f((x,y))=\alpha x+\beta y$，其中 $\alpha=f((1,0)),\beta=f((0,1)),\alpha^2+\beta^2=1$，

$$\rho(x,H_f^0)=\rho(0,H_f^\lambda)=\left.\frac{|\alpha x+\beta y-\lambda|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right|_{(0,0)}=|\lambda|$$

### 4.2.2 Riesz 表示定理

**题目 34.**(2.2.1)$H$ 是 Hilbert 空间，设 $f_1,\cdots,f_n$ 是 $H$ 上的一组有界线性泛函，对于 $k=1,2,\cdots,n$，定义

$$M\overset{\text{def}}{=}\bigcap_{k=1}^{n}N(f_k),\ N(f_k)\overset{\text{def}}{=}\{x\in H: f_k(x)=0\}$$

任取 $x_0\in H$，记 $y_0$ 为 $x_0$ 在 $M$ 上的正交投影，求证：$\exists y_1,y_2,\cdots,y_n\in N(f_k)^\perp$ 以及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ 使得：

$$y_0=x_0-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k y_k$$

**解答**：Show answer

由 Riesz 表示定理，

$$\forall 1\leqslant k\leqslant n,\exists y_k\in H\text{ s.t. } x\in H\Rightarrow f_k(x)=\langle x,y_k\rangle$$

则

$$x\in M\Leftrightarrow\langle x,y_k\rangle=0,k=1,2,\cdots,n$$

所以 $M=(\text{span}\{y_k\}_{k=1}^n)^\perp$，由习题 1.6.5 可知

$$M^\perp=\overline{\text{span}\{y_k\}_{k=1}^n}=\text{span}\{y_k\}_{k=1}^n$$

因此 $x_0-y_0\in M^\perp$ 可以表示成 $\{y_k\}$ 的线性组合：

$$x_0-y_0=\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle z_k,z_0\rangle}z_k\in\text{span}\{z_k\}_{k=1}^n=\text{span}\{y_k\}_{k=1}^n$$



**题目 35.**(2.2.3)$H$ 是 Hilbert 空间，$H$ 的元素是定义在集合 $S$ 上的复值函数。$\forall x\in S$，由

$$J_x(f)=f(x)$$

定义的映射 $J_x:H\to\mathbb{C}$ 是 $H$ 上的连续线性泛函，求证：存在 $S\times S$ 上的复值函数 $K(x,y)$，适合条件：

(1). 对任意固定的 $y\in S$，作为 $x$ 的函数有 $K(x,y)\in H$.

(2). $f(y)=(f,K(\cdot,y))$，$\forall f\in H$，$\forall y\in S$.

**解答**：Show answer

由 Riesz 表示定理，

$$\forall x\in S,\exists f_x\in H\text{ s.t. } J_x(f)=\langle f,f_x\rangle,\forall f\in H$$

令 $K(x,y)\overset{\text{def}}{=}\langle f_x,f_y\rangle$，则：对于任一固定的 $y\in S$，

$$K(x,y)=\langle f_x,f_y\rangle=J_x(f_y)=f_y(x),\forall x\in S$$

可得 $K(\cdot,y)=f_y\in H$；另一方面，

$$f(y)=\langle f,f_y\rangle=\langle f,K(\cdot,y)\rangle,\forall f\in H,\forall y\in S$$

所以 $K(x,y)$ 满足题意。

**题目 36.**(2.2.5) $H$ 是 Hilbert 空间，$L, M$ 是 $H$ 上的闭线性子空间，求证：

(1). $L \perp M \Leftrightarrow P_L P_M = 0$.

(2). $L = M^\perp \Leftrightarrow P_L + P_M = I$.

(3). $P_L P_M = P_{L\cap M} \Leftrightarrow P_L P_M = P_M P_L$.

**解答：** Show answer

(1) 必要性：

$$\langle P_L P_M x, y\rangle = \langle P_M x, P_L y\rangle = 0, \forall x, y \in H$$

充分性：

$$\langle x, y\rangle = \langle P_L x, P_M y\rangle = \langle x, P_L P_M y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0, \forall x \in L, y \in M$$

(2) 必要性：

$$x = P_L x + P_{L^\perp} x = P_L x + P_M x, \forall x \in H$$

充分性：

$$x \in L \Rightarrow x = P_L x + P_M x \Rightarrow P_M x = 0 \Rightarrow x \in M^\perp$$
$$x \in M^\perp \Rightarrow P_M x = 0 \Rightarrow P_L x = x - P_M x = x \Rightarrow x \in L$$

于是 $L = M^\perp$.

(3) 必要性：

$$P_L P_M = P_{L\cap M} = P_{M\cap L} = P_M P_L$$

充分性：对于 $\forall y \in H$，

$$M \ni P_M P_L x = P_L P_M x \in L$$

而 $P_L P_M x \in L \cap M$，则由变分引理，为证 $P_L P_M = P_{L\cap M}$ 只需验证

$$(x - P_L P_M x) \perp (L \cap M), \forall x \in H$$

实际上

$$\begin{aligned}\langle x - P_L P_M x, y\rangle &= \langle x, y\rangle - \langle P_L P_M x, y\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0, \forall y \in L \cap M\end{aligned}$$

所以得证。

### 4.2.3 Baire 纲定理

本小节没有布置课本上的习题。

### 4.2.4 共鸣定理

**题目 37.**(2.3.7) 设 $X, Y$ 是 Banach 空间，$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$，若对于 $\forall x \in X$，$\{A_n x\}$ 在 $Y$ 中收敛，求证：存在 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 使得

$$A_n x \to Ax,\ ||A|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||A_n||$$

**解答：** Show answer

对于 $\forall x\in X$，因为 $\{A_nx\}$ 收敛，可定义 $A:x\mapsto\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$，不难验证 $A$ 是线性算子。收敛列必有界，所以 $\forall x\in X,\sup\limits_{n\geqslant1}||A_nx||<\infty$. 由 UBP，

$$\exists M>0\text{ s.t. }\sup_{n\geqslant1}||A_n||\leqslant M$$

于是

$$||Ax||=\lim_{n\to\infty}||A_nx||\leqslant\liminf_{n\to\infty}||A_n||\cdot||x||\leqslant M||x||,\forall x\in X$$

（稍微解释一下这里的小于等于号是怎么来的：$||A_nx||\leqslant||A_n||\cdot||x||$，尽管 $\{||A_n||\cdot||x||\}$ 不一定是收敛列，但我们知道它的收敛子列的极限一定大于等于 $\{||A_nx||\}$ 对应收敛子列的极限，也就是 $\{||A_nx||\}$ 的极限，因此由 liminf 的定义可得。）这就证明了 $A$ 有界且 $||A||\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}||A_n||$.

**题目 38.**(2.3.8) 设 $1<p<\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对于 $\forall x\in\{\xi_k\}\in\ell^p$ 保证 $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$ 收敛，求证：$\{\alpha_k\}\in\ell^q$.

若定义

$$f:x\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$$

求证：$f$ 是 $\ell^p$ 上的线性泛函，而且

$$||f||=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**解答**：Show answer

考虑

$$f_n:\ell^p\to\mathbb{K},x=\{\xi_k\}\mapsto\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k$$

则由 Holder 不等式，

$$\begin{aligned}|f_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k\right|&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot||x||_p,\forall x\in\ell^p\end{aligned}$$

从而 $f_n\in\mathcal{L}(\ell^p,\mathbb{K})$，而且

$$||f_n||\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

于是由习题 2.3.7 可得，若令

$$f:l^p\to\mathbb{K},x=\{\xi_k\}\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k$$

则 $f\in\mathcal{L}(\ell^p,\mathbb{K})$，

$$||f||\leqslant\liminf_{n\to\infty}||f_n||\leqslant\liminf_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

另一方面，取

$$x_k^{(n)}=\begin{cases}|\alpha_k|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(\alpha_k)}&,1\leqslant k\leqslant n\\0&,k>n\end{cases}$$

则 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)\in l^p$，且

$$||x^{(n)}||_p=\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

注意 $\alpha_k=|\alpha_k|e^{i\cdot\arg(\alpha_k)}$，

$$\begin{aligned}|f(x^{(n)})|&=\sum_{k=1}^n\alpha_k|\alpha_k|^{q-1}e^{-i\cdot\arg(\alpha_k)}\\&=\sum_{k=1}^n|\alpha_k|e^{i\cdot\arg(\alpha_k)}\cdot|\alpha_k|^{q-1}e^{-i\arg(\alpha_k)}\\&=\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q=\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\\&=\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\cdot||x^{(n)}||_p\end{aligned}$$

于是

$$||f||\geqslant\frac{|f(x^{(n)})|}{||x^{(n)}||_p}=\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

令 $n\to\infty$ 则

$$||f||\geqslant\limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\tag{2}$$

结合 (1)(2) 式则可知等号成立，同时这也说明 $||\{\alpha_k\}||_q<\infty\Rightarrow\{\alpha_k\}\in\ell^q$.

**题目 39.**(2.3.9) 如果序列 $\{\alpha_k\}$ 使得对于 $\forall x=\{\xi_k\}\in\ell^1$，保证 $\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k$ 收敛，求证：$\{\alpha_k\}\in\ell^\infty$.

若定义

$$f:x\mapsto\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k$$

作为 $\ell^1$ 上的线性泛函，求证：

$$||f||=\sup_{k\geqslant1}|\alpha_k|$$

**解答：** Show answer

思路和上一题基本相同。设

$$f_n:l^1\to\mathbb{K},x=\{\xi_k\}\mapsto\sum_{k=1}^n\alpha_k\xi_k$$

则

$$|f_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^n\alpha_k\xi_k\right|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|\cdot\sum_{k=1}^n|\xi_k|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|\cdot||x||_1$$

所以 $f_n$ 有界，且

$$||f_n||\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\alpha_k|$$

于是由习题 2.3.7 可得，若令

$$f:l^1\to\mathbb{K},x=\{\xi_k\}\mapsto\sum_{k=1}^\infty\alpha_k\xi_k$$

则 $f$ 有界，而且

$$||f|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||f_n|| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\alpha_k| \leqslant \sup_{k\geqslant 1} |\alpha_k| \tag{1}$$

另一方面，取 $x^{(n)} = (0, 0, \cdots, 0, \underset{n}{1}, 0, 0, \cdots)$，则 $x^{(n)} \in l^\infty$，$||x^{(n)}|| = 1$，且

$$||f|| \geqslant |f(x^{(n)})| = \alpha_n$$

于是 $||f|| \geqslant \sup\limits_{n\geqslant 1} |\alpha_n|$，结合 (1) 式可得 $||f|| = \sup\limits_{k\geqslant 1} |\alpha_k|$.

### 4.2.5 开映射定理

**题目 40.**(2.3.1)$X$ 是 Banach 空间，$X_0$ 是其闭子空间，定义映射：

$$\varphi : X \to X \backslash X_0, x \mapsto [x]$$

$[x]$ 表示含 $x$ 的商类。求证 $\varphi$ 是开映射。

**解答：** Show answer

$$||[x]|| = \inf_{y\in[x]} ||y|| \leqslant ||x||$$

所以 $\varphi$ 有界。由定义可知 $\varphi$ 是满射，则由 OMT 可知 $\varphi$ 是开映射。

**题目 41.**(2.3.2) 设 $X, Y$ 是 Banach 空间，方程 $Ux = y$ 对于 $\forall y \in Y$ 有解，其中 $U \in \mathcal{L}(X, Y)$，并且存在 $m > 0$ 使得

$$||Ux|| \geqslant m||x||, \forall x \in X$$

求证：$U$ 有连续逆 $U^{-1}$，并且 $||U^{-1}|| \leqslant \frac{1}{m}$.

**解答：** Show answer

方程 $Ux = y$ 对于 $\forall y \in Y$ 有解，说明 $U$ 是满射；设 $Ux_1 = Ux_2 = y$，则

$$m||x_1 - x_2|| \leqslant 0 = ||U(x_1 - x_2)|| \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

所以 $U$ 是单射，进而是双射，则由 OMT，$U^{-1}$ 存在、有界且连续，且

$$||U^{-1}y|| = ||U^{-1}Ux|| = ||x|| \leqslant \frac{1}{m}||Ux|| = \frac{1}{m}||y|| \Rightarrow ||U^{-1}|| \leqslant \frac{1}{m}$$

**题目 42.**(2.3.3) 设 $H$ 是 Hilbert 空间，$A \in \mathcal{L}(H)$，并且 $\exists m > 0$ 使得

$$|\langle Ax, x\rangle| \geqslant m||x||^2, \forall x \in H$$

求证：存在 $A^{-1} \in \mathcal{H}$.

**解答：** Show answer

由题意可知

$$\begin{aligned} x \in H \Rightarrow & m||x||^2 \leqslant |\langle Ax, x\rangle| \leqslant ||Ax|| \cdot ||x|| \\ \Rightarrow & m||x|| \leqslant ||Ax|| \end{aligned}$$

于是 $A$ 是单射：

$$0 = ||Ax_1 - Ax_2|| \geqslant m||x_1 - x_2|| \Rightarrow x_1 = x_2$$

然后证明 $A$ 是满射，从而 $A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

1° $\mathrm{Ran}(A) = \overline{\mathrm{Ran}(A)}$：

$$\begin{aligned} y \in \overline{\mathrm{Im}(A)} &\Rightarrow \exists x_n \in H \text{ s.t. } Ax_n \to y \\ &\Rightarrow m||x_n - x_m|| \leqslant ||Ax_n - Ax_m|| \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\ &\Rightarrow \exists x \in H \text{ s.t. } x_n \to x, Ax_n \to Ax \\ &\Rightarrow Ax = y \end{aligned}$$

2° $\mathrm{Ran}(A)^{\perp} = \{0\}$，从而 $\mathrm{Im}(A) = \overline{\mathrm{Im}(A)} = H$：

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(A)^{\perp} &\Rightarrow \langle y, Ax \rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Rightarrow 0 = |\langle y, Ay \rangle| \geqslant m||y||^2 \\ &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

由变分引理，1° 表明 $H = \mathrm{Ran}(A) \oplus \mathrm{Ran}(A)^{\perp}$，所以 2° $\Rightarrow H = \mathrm{Ran}(A)$. 这个证明满射的思路在 *Lax-Milgram* 定理的证明中也用到了。

**题目 43.**(2.3.5) 用等价范数定理证明：$(C[0,1], ||\cdot||_1)$ 不是 Banach 空间，其中

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t, \forall f \in C[0,1]$$

**解答：** Show answer

（反证）假设 $(C[0,1], ||\cdot||_1)$ 是 Banach 空间，则

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

由等价范数定理可知，

$$\exists C > 0 \text{ s.t. } ||f||_1 \geqslant C \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \forall f \in C[0,1] \tag{$*$}$$

若令

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n(1-nx) & , x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & , x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

则 $||f_n||_1 = 1$，$\max\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 2n$，当 $n$ 充分大时与 $(*)$ 式矛盾。

**题目 44.**(2.3.11) 设 $X, Y$ 是 Banach 空间，$A \in \mathcal{L}(X, Y)$ 是满射，求证：如果在 $Y$ 中 $y_n \to y_0$，则存在 $C > 0$ 和 $x_n \to x_0$ 使得 $Ax_n = y_n$，且 $||x_n|| \leqslant C||y_n||$.

**解答：** Show answer

记 $N = \{x \in X : Ax = 0\}$，则 $N$ 是 $X$ 的闭线性子空间，且商空间 $X/N$ 是 Banach 空间。定义映射：

$$\tilde{A} : X/N \to Y, \ [x] \mapsto Ax$$

则

*(1).* $\tilde{A}$ 是单射：$\tilde{A}[x] = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N \Rightarrow [x] = 0$.

*(2).* $\tilde{A}$ 是满射：$y \in Y \Rightarrow \exists x \in X, Ax = y \Rightarrow \tilde{A}[x] = Ax = y$.

*(3).* $\tilde{A}$ 是有界线性映射：$A$ 是线性映射易知 $\tilde{A}$ 也线性.$\forall x' \in [x]$，

$$||\tilde{A}[x]|| = ||Ax'|| \leqslant ||A|| \cdot ||x'||$$

取 $x' \in [x]$ 满足 $||x'|| \leqslant 2||[x]||$，则

$$||\tilde{A}[x]|| \leqslant 2||A|| \cdot ||[x]||$$

所以 $\tilde{A}$ 有界。

由 IMT 可知 $\tilde{A}^{-1}$ 存在且有界，不妨假设 $y_0 = 0, y_n \to 0$，记 $[x_n] = \tilde{A}^{-1}y_n$，则

$$||[x_n]|| = ||\tilde{A}^{-1}y_n|| \leqslant ||\tilde{A}^{-1}y_n|| \leqslant ||\tilde{A}^{-1}|| \cdot ||y_n||$$

于是取 $x_n \in [x_n]$，使得 $||x_n|| \leqslant 2||[x_n]||$，便有 $||x_n|| \leqslant C||y_n||$，其中 $C = 2||\tilde{A}^{-1}||$.

### 4.2.6 闭图像定理

**题目 45.**(2.3.4) 设 $X, Y$ 是赋范线性空间，$D$ 是 $X$ 的线性子空间，并且 $A : D \to Y$ 是线性映射，求证：

(1). $A$ 连续且 $D$ 闭 $\Rightarrow$ $A$ 闭；

(2). $A$ 连续且闭，则 $Y$ 完备 $\Rightarrow$ $D$ 闭；

(3). $A$ 单且闭 $\Rightarrow$ $A^{-1}$ 闭；

(4). $X$ 完备，$A$ 单且闭，$\mathrm{Ran}(A)$ 在 $Y$ 中稠密，并且 $A^{-1}$ 连续，那么 $\mathrm{Ran}(A) = Y$.

**解答**：Show answer

*(1).* 设 $\{x_n\} \subset D$ 收敛到 $x$，$Ax_n \to y$，则 $D$ 闭 $\Rightarrow x \in D$，$A$ 连续 $\Rightarrow Ax_n \to Ax$，所以 $Ax = y$，$A$ 是闭算子。

*(2).* 如果 $Y$ 完备，设 $\{x_n\} \subset D$ 收敛到 $x$，

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow ||Ax_n - Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x_n - x|| \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\
&\Rightarrow \exists y \in Y \text{ s.t. } Ax_n \to y \\
&\Rightarrow x \in D, Ax = y
\end{aligned}$$

则 $D$ 闭。

*(3).* $A$ 单射，所以记 $\mathrm{Range}(A) = \mathrm{Dom}(A^{-1}) = G \subset Y$，设 $\{y_n = Ax_n\}$ 是 $G$ 中的收敛列，且 $\{x_n\}$ 是 $D$ 中的收敛列，因为 $A$ 是闭算子，可知 $x_n \to x \in D$，$y_n \to y = Ax \in G$，也就是 $y_n \to y \in G$，$x_n \to A^{-1}y \in D$. 所以 $A^{-1}$ 也是闭算子。

*(4).* $X$ 完备，$A$ 单且闭，则 $\mathrm{Ran}(A)$ 在 $Y$ 中稠密，$A^{-1}$ 连续，则 $\mathrm{Ran}(A) = Y$，$A^{-1}$ 连续且闭，$\mathrm{Ran}(A)$ 闭，所以 $\mathrm{Ran}(A) = \overline{\mathrm{Ran}(A)} = Y$.

**题目 46.**(2.3.12) 设 $X, Y$ 是 Banach 空间，$T$ 是闭线性算子，$D(T) \subset X$，$R(T) \subset Y$，$N(T) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X | Tx = 0\}$. 求证：

(1). $N(T)$ 是 $X$ 的闭线性子空间。

(2). $N(T) = \{0\}, R(T)$ 在 $Y$ 中闭的充要条件是：

$$\exists \alpha > 0 \text{ s.t. } ||x|| \leqslant \alpha ||Tx||, \forall x \in D(T)$$

(3). 点 $x \in X$ 到集合 $N(T)$ 的距离：

$$d(x, N(T)) \overset{\text{def}}{=} \inf_{z \in N(T)} ||z - x||$$

则 $R(T)$ 在 $Y$ 中闭的充要条件是：

$$\exists \alpha > 0 \text{ s.t. } d(x, N(T)) \leqslant \alpha ||Tx||, \forall x \in D(T)$$

**解答**：Show answer

(1). 显然 $N(T)$ 是线性子空间；设 $N(T) \ni x_n \to x_0$，$\{Tx_n = 0\}$ 是收敛列，由 $T$ 是闭算子可知 $x_0 \in D(T)$ 且 $Tx_0 = 0 \Rightarrow x_0 \in N(T) \Rightarrow N(T)$ 闭。

(2). 必要性：设 $N(T) = \{0\}$，$R(T)$ 闭，则 $R(T)$ 是 Banach 空间，由 IMT 可得 $T^{-1}$ 存在且有界，于是

$$\exists \alpha > 0, ||x|| \leqslant \alpha ||Tx||, \forall x \in D(T)$$

充分性：设对于某个 $\alpha > 0$，$||x|| \leqslant \alpha ||Tx||, \forall x \in D(T)$，则

$1^\circ$ $N(T) = \{0\}$：$Tx = 0 \Rightarrow ||x|| \leqslant 0 \Rightarrow x = 0$.

$2^\circ$ $R(T)$ 闭：

$$\begin{aligned} Tx_n \to y \Rightarrow & ||x_n - x_m|| \leqslant \alpha ||Tx_n - Tx_m|| \to 0 \text{ as } n, m \to \infty \\ \Rightarrow & \exists x_0 \in X \text{ s.t. } x_n \to x_0 \\ \Rightarrow & x_0 \in D(T), Tx_0 = y_0 \end{aligned}$$

(3). 注意到 $X/N(T)$ 是 Banach 空间，且 $d(x, N(T)) = ||[x]||, \forall x \in X$. 定义：

$$\tilde{T} : X/N(T) \to Y,\ \tilde{T}[x] = Tx$$

则

$$D(\tilde{T}) = \{[x] \in X/N(T) : x \in D(T)\}$$

可见 $N(\tilde{T}) = [0]$，$R(\tilde{T}) = R(T)$，于是只需证明 $\tilde{T}$ 是闭算子。设 $[x_n - x_0] \to 0$，$Tx_n - y_0 \to 0$，则 $\exists x_n^{(n)} \in [x_n], x_0^{(n)} \in [x_0]$ 使得

$$||x_n^{(n)} - x_0^{(n)}|| \leqslant 2||[x_n - x_0]|| \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

设

$$\tilde{x}_n^{(n)} = x_n^{(n)} - (x_0^{(n)} - x_0)$$

则：

$1^\circ$ $||\tilde{x}_n^{(n)} - x_0|| = ||x_n^{(n)} - x_0^{(n)}|| \to 0$，$n \to \infty$.

$2^\circ$ $T\tilde{x}_n^{(n)} = Tx_n^{(n)} - Tx_0^{(n)} + Tx_0 = Tx_n \to y_0$，$n \to \infty$.

由 $T$ 是闭算子可知：$x_0 \in D(T), Tx_0 = y_0$，从而 $[x_0] \in D(\tilde{T}), \tilde{T}[x_0] = Tx_0 = y_0$.

### 4.2.7 Hahn-Banach 定理

**题目 47.**(2.4.3) 设 $X$ 是复线性空间，$p$ 是 $X$ 上的半范数，任取 $x_0 \in X$ 满足 $p(x_0) \neq 0$，求证：存在 $X$ 上的线性泛函 $f$ 满足：

1. $f(x_0) = 1$.
2. $|f(x)| \leqslant p(x)/p(x_0), \forall x \in X$.

**解答：** Show answer

$\tilde{p}(x) \overset{\text{def}}{=} p(x)/p(x_0)$ 仍然是一个半范数，取 $X_0 = \text{span}\{x_0\} = \{\alpha x_0 : \alpha \in \mathbb{C}\}$，定义 $X_0$ 上的映射

$$f_0 : X_0 \to \mathbb{C}, \alpha x_0 \mapsto \alpha$$

则 $f$ 是线性映射，并且

$$|f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| = \frac{p(\alpha x_0)}{p(x_0)} = \tilde{p}(x)$$

于是由复 HBT（定理 2.7.2），存在 $X$ 上的线性泛函 $f$，使得

$$f|_{X_0} = f_0,\ |f(x)| \leqslant \tilde{p}(x) = \frac{p(x)}{p(x_0)},\ \forall x \in X$$

进而 $f(x_0) = f_0(x_0) = 1$.

**题目 48.**(2.4.5)$X$ 是赋范线性空间，$X_0$ 是其闭子空间，求证：

$$\rho(x, X_0) = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, ||f|| = 1, f(X_0) = 0\}$$

其中 $\rho(x, X_0) \overset{\text{def}}{=} \inf\limits_{y \in X_0} ||x - y||$.

**解答：** Show answer

当 $x \in X_0$ 时等式两边均为零，成立，下设 $x \notin X_0$，记 $F = \{f \in X^* : ||f|| = 1, f(X_0) = 0\}$.

一方面，$\forall f \in F$，$\forall y \in X_0$，

$$|f(x)| = |f(x - y)| \leqslant ||f|| \cdot ||x - y|| = ||x - y||$$

所以

$$\sup_{f \in F} |f(x)| \leqslant \inf_{y \in X_0} ||x - y||$$

另一方面，$X_0$ 闭 $\Rightarrow \rho(x, X_0) > 0$，由定理 2.7.4 可得

$$\exists \tilde{f} \in F \text{ s.t. } \tilde{f}(x) = \rho(x, X_0), \tilde{f}(X_0) = 0.$$

于是 $|\tilde{f}(x)| = \rho(x, X_0)$，因此

$$\rho(x, X_0) \leqslant \sup_{f \in F} |f(x)|$$

题目得证。

**题目 49.**(2.4.7)$X$ 是赋范线性空间，给定 $X$ 中 $n$ 个线性无关的元素 $x_1, \cdots, x_n$，求证：存在 $f_1, \cdots, f_n \in X^*$ 使得

$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij}, \ \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

**解答：** Show answer

考虑 $X_0 = \text{span}\{x_j\}_{j=1}^n$ 及其上的 $n$ 个线性泛函：

$$\tilde{f}_i : X_0 \to \mathbb{K}, \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \mapsto \alpha_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

则由有限维线性赋范空间中的范数等价，有

$$\left| \tilde{f}_i \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right) \right| = \alpha_i \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j| \leqslant C \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\|$$

因此 $\tilde{f}_i$ 都是 $X_0$ 上的有界线性泛函，所以由 HBT（定理 2.7.3），

$$\exists f_i \in X^* \text{ s.t. } \langle f_i, x_j \rangle = \langle \tilde{f}_i, x_j \rangle = \delta_{ij}, \ i, j = 1, 2, \cdots, n$$

**题目 50.**(1.5.1)$X$ 是赋范线性空间，$E$ 是以 0 为内点的真凸子集，$P$ 是 $E$ 产生的 Minkowski 泛函，求证：

(1). $x \in \mathring{E} \Leftrightarrow P(x) < 1$.

(2). $\overline{\mathring{E}} = \overline{E}$.

**解答：** Show answer

(1). 一方面，$x \in \mathring{E} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$\frac{x}{1/(1+\varepsilon)} = (1+\varepsilon)x \in E$$

于是

$$P(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

另一方面，若 $P(x) < 1$，设 $r \in (1, 1/P(x))$，则有 $rx \in E$. 因为 0 是 $E$ 的内点，存在 $B(0,\delta) \subset E$，令

$$d = \delta(1 - \frac{1}{r})$$

对于任一 $y \in B(x,d)$，

$$y = \frac{1}{r} \cdot rx + (1 - \frac{1}{r})\frac{r(y-x)}{r-1}$$

注意到 $rx \in E, \frac{r(y-x)}{r-1} \in B(0,\delta) \subset E \Rightarrow y \in E \Rightarrow B(x,d) \subset E \Rightarrow x$ 是内点。

(2). 即证明 $\forall x \in E$，都存在 $\mathring{E}$ 中的点列 $x_n$ 使得 $x_n \to x$，取 $x_n = (1 - \frac{1}{n})x$ 即可。

**题目 51.**(2.4.9)$X$ 是复线性空间，$E$ 是 $X$ 上的非空均衡集，$f$ 是 $X$ 上的线性泛函，求证：

$$|f(x)| \leqslant \sup_{y \in E} \mathrm{Re} f(y), \forall x \in E$$

**解答**：Show answer

$\forall x \in E$，

$$|f(x)| = f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \arg f(x)} = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \arg f(x)}x) = \mathrm{Re} f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot \arg f(x)}x) \leqslant \sup_{y \in E} \mathrm{Re} f(y)$$

**题目 52.**(2.4.11)$E, F$ 是实赋范线性空间 $X$ 中的两个互不相交的非空凸集，且 $E$ 是开的和均衡的，求证：$\exists f \in X^*$ 使得：

$$|f(x)| < \inf_{y \in F} |f(y)|, \forall x \in E$$

笔者注：“均衡的”应该改成“对称的”，因为前面说了 $X$ 是实的。

**解答**：Show answer

由凸集分离定理（定理 2.7.7），存在非零 $f \in X^*$，使得

$$\sup_{z \in E} f(z) \leqslant \inf_{y \in F} f(y) \leqslant \inf_{y \in F} |f(y)|$$

引理：$\forall x \in E$ 有 $f(z) < \sup_{z \in E} f(z)$. 因此

$$|f(x)| = \mathrm{sgn}(f(x))f(x) = f(x \cdot \mathrm{sgn}(f(x))) < \sup_{z \in E} f(z) \leqslant \inf_{y \in F} |f(y)|$$

引理的证明：（反证）假设存在 $z_0 \in E$ 使得 $f(z_0) = \sup_{z \in E} f(z)$，$E$ 开所以存在 $B(z_0, \delta) \subset E$，于是

$$\forall z \in B(z_0, \delta), f(z_0) \geqslant f(z) \Rightarrow f(z_0) - f(z) = f(z_0 - z) \geqslant 0$$

即

$$\forall y \in B(0,\delta), f(y) \geqslant 0$$

因此也有 $f(-y) = -f(y) \geqslant 0$，进而 $f(y) \equiv 0$ on $B(0,\delta)$，于是 $f$ 恒为零，这与 $f$ 非零矛盾。

**题目 53.**(2.4.13)$X$ 是赋范线性空间，设 $M$ 是 $X$ 上的闭凸集，求证：$\forall x \in X \backslash M$，一定存在 $f_1 \in X^*$ with $||f_1|| = 1$，且

$$\sup_{y \in M} f_1(y) \leqslant f_1(x) - d(x)$$

其中 $d(x)=\inf\limits_{z\in M}||x-z||$.

**解答：** Show answer

注意到开凸集 $B(x,d(x))\cap M=\varnothing$，由凸集分离定理可得存在非零 $f\in X^*$ 使得

$$\sup_{y\in M}f(y)\leqslant\inf_{z\in B(x,d(x))}f(z)=\inf_{||w||<1}f(x-d(x)w)=f(x)-d(x)\cdot\sup_{||w||<1}f(w)=f(x)-d(x)\cdot||f||$$

（这里最后一个等号见习题 2.1.2(2).）于是取 $f_1=f/||f||$，则

$$\sup_{y\in M}f_1(y)\leqslant f_1(x)-d(x)$$

### 4.2.8 对偶空间、自反空间、弱收敛

**题目 54.**(2.5.1) 证明：

$$(\ell^p)^*=\ell^q,\ 1\leqslant p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

**解答：** Show answer

对于 $\forall x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty\in\ell^p,y=\{\eta_k\}_{k=1}^\infty\in\ell^q$，由 *Holder* 不等式：

$$\left|\sum_{k=1}^\infty\xi_k\eta_k\right|\leqslant\left(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^\infty|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant||x||_p\cdot||y||_q$$

定义

$$T_y:l^p\to\mathbb{K},\ x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty\mapsto\sum_{k=1}^\infty\xi_k\eta_k$$

则 $T_y$ 有界且 $||T_y||\leqslant||y||_q$，下面证明映射 $\Lambda:y\mapsto T_y$ 是等距同构。

对于 $T\in(\ell^p)^*$，令 $e_k=(0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots)$，则

$$T(x)=T\left(\sum_{k=1}^\infty\xi_ke_k\right)=\sum_{k=1}^\infty\xi_kT(e_k),\ \forall x=\{\xi_k\}_{k=1}^\infty\in l^p$$

取 $y_T\overset{\text{def}}{=}\{T(e_k)\}_{k=1}^\infty$，则 $\Lambda(y_T)=T$，下面证明 $y_T\in\ell^p$ 且 $||y_T||_q\leqslant||T||$，从而映射 $\Lambda$ 是满射且保距，进而是等距同构。

若 $p>1$，设 $a_k=|T(e_k)|^{q-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg T(e_k)}$，$z_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n,0,0,\cdots)\in\ell^p$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|T(e_k)|^q=\sum_{k=1}^na_k\cdot T(e_k)=T(z_n)&\\ &\leqslant||T||\cdot||z_n||_p\\ &=||T||\cdot\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=||T||\cdot\left(\sum_{k=1}^n|T(e_k)|^{p(q-1)}\right)^{\frac{1}{p}}\\ &=||T||\cdot\left(\sum_{k=1}^n|T(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

从而

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_k)|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|T(e_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant ||T||,\ \forall n$$

令 $n\to\infty$ 可得 $||y_T||_q\leqslant ||T||$.

若 $p=1,q=\infty$，

$$\begin{aligned}||y_T||_\infty&=\sup_{n\geqslant 1}|T(e_n)|\\&=\sup_{n\geqslant 1}T(e_n)\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg T(e_n)}\\&=\sup_{n\geqslant 1}T\left(\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg T(e_n)}\cdot\delta_{kn}\right\}_{k=1}^{\infty}\right)\leqslant ||T||\end{aligned}$$

最后一个不等号来自

$$||T||=\sup_{||x||=1}||Tx||$$

所以题目得证。

**题目 55.**(2.5.2) 设 $C$ 是收敛数列全体，赋以范数：

$$||\cdot||:\{\xi_k\}\in C\mapsto\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k|$$

求证 $C^*=\ell^1$.

**解答：** Show answer

记

$$e_0=(1,1,\cdots),\ e_k=(0,\cdots,0,\underset{k}{1},0,\cdots)\in C$$

对于 $x=\{x_n\}\in C$，$x_n\to x_0$，设 $a=a_n\in\ell^1$，定义映射

$$T_a:C\to\mathbb{C},x\mapsto a_1x_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}x_n$$

右侧级数是收敛的，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}x_n|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}|x_n|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}|\leqslant ||x||\cdot||a||_1<+\infty$$

又因为 $x_0\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 1}|x_n|$，

$$|T_a(x)|\leqslant|a_1x_0|+\sup_{n\geqslant 1}|x_n|\cdot\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leqslant\sup_{n\geqslant 1}|x_n|\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant ||x||\cdot||a||_1$$

所以 $||T_a||\leqslant||a||_1$，同时，令 $y_n=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_2)},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_n)},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_1)},\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_1)},\cdots)$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}|a_k|+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_1)}\cdot\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\right|=|T_a(y_n)|\leqslant||T_a||\cdot||y_n||=||T_a||$$

令 $n\to\infty$ 就得到

$$||a||_1=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\leqslant||T_a||$$

，从而 $||T_a||=||a||_1$. 那么定义映射 $\Lambda:\ell^1\to C^*,a\mapsto T_a$，只需证明 $\Lambda$ 是满射。

对于任意 $T\in C^*$，令 $a_{k+1}=T(e_k)$，$z_n=(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_2)},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_n)},0,0,\cdots)\in C$，于是

$$\sum_{k=2}^{n}|a_k|=\sum_{k=2}^{n}a_k\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\arg(a_k)}=T(z_n)\leqslant||T||\cdot||z_n||=||T||<+\infty,\forall n$$

这说明级数 $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ 收敛，取

$$a_1 = T(e_0) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

则令 $a = \{a_n\} \in \ell^1$，且

$$T_a(x) = a_1 x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x_{k-1} = T((x_0, x_0, \cdots)) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x_{k-1} - x_0) = T((x_1, x_2, \cdots)) = T(x)$$

得证。

**题目 56.**(2.5.4) 证明：有限维赋范空间一定自反。

**解答：** Show answer

设 $\{x_k\}_{k=1}^n$ 是 $X$ 的一组基，则由习题 2.4.7 可知

$$\exists \{f_k\}_{k=1}^n \subset X^* \text{ s.t. } \langle f_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

于是对 $\forall f \in X^*, \forall x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$，

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) = \sum_{k=1}^n f_k(x) f(x_k)$$

此即说明，

$$f = \sum_{k=1}^n f(x_k) f_k$$

现对 $\forall y \in X^{**}$，

$$y(f) = y\left(\sum_{k=1}^n f(x_k) f_k\right) = \sum_{k=1}^n f(x_k) y(f_k) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k y(f_k)\right)$$

于是 $x_0 \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n x_k y(f_k) \in X$ 使得 $x_0^{**} = y$，这意味着从 $x$ 到 $x^{**}$ 的自然映射是满的，所以 $X$ 是自反的.

**题目 57.**(2.5.5) 证明：Banach 空间自反当且仅当它的共轭空间（对偶空间）是自反的。

**解答：** Show answer

设 $X$ 是 *Banach* 空间，从 $X$ 到 $X^{**}$ 的自然映射是 $T$.

必要性：即证明从 $X^*$ 到 $X^{***}$ 的自然映射是满的，考虑 $y \in X^{***}$，取

$$f : X \to \mathbb{K}, x \mapsto y(T(x)) = y(x^{**})$$

于是 $\forall x^{**} \in X^{**}$，

$$y(x^{**}) = f(x) = x^{**}(f)$$

这说明 $f^{**} = y$，得证。

充分性：设 $X^*$ 自反，则由必要性知 $X^{**}$ 自反，又因为 $X$，作为 $X^{**}$ 的子空间（因为自然映射是嵌入）是闭的（因为 $X$ 是 *Banach* 空间），自反空间的闭子空间也自反（*Pettis*，定理 *2.8.11*），从而 $X$ 自反。

**题目 58.**(2.5.6) 设 $X$ 是赋范线性空间，$T$ 是从 $X$ 到 $X^{**}$ 的自然映射，求证：$R(T)$ 闭的充要条件是 $X$ 完备。

**解答：** Show answer

$X^{**}$ 是完备的，$R(T) \cong X$ 作为 $X^{**}$ 的子空间，闭 $\Leftrightarrow$ 完备。

**题目 59.**(2.5.8) 在 $\ell^2$ 中定义算子：

$$T:(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdot)\mapsto(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$$

证明 $T\in\mathcal{L}(\ell^2)$，并求 $T^*$.

**解答：** Show answer

对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\ell^2$, 有

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k}{k}\right|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|x\|^2$$

从而 $T\in\mathcal{L}(\ell^2)$.

$\ell^2$ 是 *Hilbert* 空间，由 *Riesz* 表示定理，$\forall f\in(\ell^2)^*=\ell^2$，存在 $y_f=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$f=\langle\cdot,y_f\rangle$$

$T^*$ 满足：

$$T^*f(x)=f(T(x))=\langle T(x),y_f\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_nx_n}{n}\Rightarrow T^*f=\langle\cdot,\left\{\frac{f_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\rangle$$

所以 $T^*:\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\mapsto\{f_n/n\}_{n=1}^{\infty}$，也就是 $T^*=T$.

**题目 60.**(2.5.9)$H$ 是 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}(H)$ 满足

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle,\ \forall x,y\in H$$

求证：

(1). $A^*=A$.

(2). $R(A)$ 在 $H$ 中稠密 $\Rightarrow$ 方程 $Ax=y$ 对于 $\forall y\in R(A)$ 存在唯一解。

**解答：** Show answer

(1). 对于 $f\in H^*$，由 *Riesz* 表示定理，存在 $y_f$ 使得 $f=\langle\cdot,y_f\rangle$，并且 $||f||=||y_f||$，因此 $f\mapsto y_f$ 就是 $H^*$ 到 $H$ 的等距同构。因此：$\forall f\in H^*$，$\forall x\in H$，

$$A^*f(x)=f(A(x))\Rightarrow\langle x,y_{A^*f}\rangle=\langle Ax,y_f\rangle=\langle x,Ay_f\rangle\Rightarrow Ay_f=y_{A^*f}$$

而 $A^*:f\mapsto A^*f$ 对应了 $y_f\mapsto y_{A^*f}$，所以 $A^*y_f=y_{A^*f}=Ay_f\Rightarrow A^*=A$.

(2). 对 $\forall y\in R(A)$, 若

$$Ax_1=y=Ax_2$$

则 $\forall z\in H$，

$$0=\langle A(x_1-x_2),z\rangle=\langle x_1-x_2,Az\rangle$$

由于 $R(A)$ 在 $H$ 中稠密，

$$\exists z_n\in H\text{ s.t. }Az_n\to x_1-x_2$$

从而

$$||x_1-x_2||^2=\lim_{n\to\infty}\langle x_1-x_2,Az_n\rangle=0\Rightarrow x_1=x_2$$

**题目 61.**(2.5.13) 设 $\{x_n\}\subset C[a,b],x\in C[a,b]$，且 $x_n\xrightarrow{w}x$，求证：

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t),\ \forall t\in[a,b]$$

**解答：** Show answer

对于 $t \in C[a,b]$，取赋值映射 $f_t : x \mapsto x(t)$，

$$\frac{|f_t(x)|}{||x||} = \frac{|x(t)|}{\sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|} \leqslant 1$$

则 $f_t \in C[a,b]^*$，

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_t(x_n) = f_t(x)$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$$

**题目 62.**(2.5.14) 已知在赋范线性空间中 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，求证：

$$\liminf_{n\to\infty} ||x_n|| \geqslant ||x_0||$$

**解答：** Show answer

左式非负，所以 $x_0 = 0$ 时成立。下设 $x_0 \neq 0$，则存在 $f \in X^*$ s.t. $||f|| = 1$ s.t. $f(x_0) = ||x_0||$，从而

$$||x_0|| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||f|| \cdot ||x_n|| = \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$$

**题目 63.**(2.5.15)$H$ 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 $H$ 的正交规范基，求证：在 $H$ 中 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 的充要条件为

1° $||x_n||$ 有界。

2° $\langle x_n, e_k\rangle \to \langle x_0, e_k\rangle, \forall k$.

**解答：** Show answer

充分性：设 $f \in H^*$，由 *Riesz* 表示定理，存在

$$y_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$$

使得 $f = \langle \cdot, y_f\rangle$，设

$$y_f^n = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$$

则

$$|\langle x_n - x_0, y_f^n\rangle| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |y_k| \cdot |\langle x_n - x_0, e_k\rangle| \to 0$$

因此

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x_0)| =& |\langle x_n - x_0, y_f\rangle| \\
\leqslant& |\langle x_n - x_0, y_f^n\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_f - y_f^n\rangle| \\
\leqslant& |\langle x_n - x_0, y_f^n\rangle| + ||x_n - x_0|| \cdot ||y_f - y_f^n|| \\
\leqslant& |\langle x_n - x_0, y_f^n\rangle| + 2M||y_f - y_f^n|| \to 0
\end{aligned}$$

所以 $x_n \xrightarrow{w} x_0$.

必要性：令 $f = \langle \cdot, e_k\rangle \in H^*$，则 2° 得证；对于 $\forall n$，考虑 $x_n^{**} \in H^{**}$，则 $||x_n^{**}|| = ||x_n||$，收敛列必有界，所

以

$$\sup_n |x_n^{**}(f)| = \sup_n |f(x_n)| < +\infty$$

由 UBP 可得 $x_n^{**}$ 一致有界，进而 1° 得证。

**题目 64.**(2.5.17)$H$ 是 Hilbert 空间，在 $H$ 中 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，且 $y_n \to y_0$，求证：

$$\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x_0, y_0 \rangle$$

**解答**：Show answer

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| &= |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x_0, y_n \rangle + \langle x_0, y_n \rangle - \langle x_0, y_0 \rangle| \\
&= |\langle x_n - x_0, y_n \rangle + \langle x_0, y_n - y_0 \rangle| \\
&\leqslant |\langle x_n - x_0, y_n \rangle| + |\langle x_0, y_n - y_0 \rangle|
\end{aligned}$$

由 $y_n \to y_0$ 知第二项 $\to 0$；$\langle \cdot, y_n \rangle \in H^*$，所以 $x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow$ 第一项 $\to 0$.

**题目 65.**(2.5.18)$H$ 是 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 $H$ 的正交规范基，求证：在 $H$ 上 $e_n \xrightarrow{w} 0$，但 $e_n \nrightarrow 0$.

**解答**：Show answer

也就是证明 $\forall x \in H, \langle x, e_n \rangle \to 0$，实际上

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leqslant ||x|| < +\infty$$

所以 $\langle x, e_n \rangle \to 0$.

$||e_n|| = 1 > 0$，所以 $e_n \nrightarrow 0$.

**题目 66.**(2.5.20) 求证：在自反的赋范线性空间中，集合的弱列紧性与有界性是等价的。

**解答**：Show answer

弱列紧 $\Rightarrow$ 有界：假设 $M \subset X$ 弱列紧且无界，则 $\forall n \geqslant 1, \exists x_n \in M$ s.t. $||x_n|| \geqslant n$，取 $\{x_n\}$ 的弱收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，$X$ 自反，所以取 $x_{n_k}^{**} \in X^{**}$ 有 $||x_{n_k}^{**}|| = ||x_{n_k}||$，而且

$$\sup_n |x_{n_k}^{**}(f)| = \sup_n |f(x_{n_k})| < +\infty \overset{\text{UBP}}{\Rightarrow} \sup_n ||x_{n_k}||^{**} < +\infty \Rightarrow \{x_{n_k}\}\text{有界}$$

这与 $||x_{n_k}|| \geqslant n_k \to \infty$ 矛盾。

有界 $\Rightarrow$ 弱列紧：定理 *2.8.18*(Eberlein-Smulian).

## 4.3 第三章

**题目 67.**(2.6.1) $X$ 是 Banach 空间，求证：$\mathcal{L}(X)$ 中可逆（存在有界逆）算子集是开的。

**解答**：Show answer

设 $A \in \mathcal{L}(X)$ 可逆，对于 $\forall B \in \mathcal{L}(X)$ 且 $||A - B|| \leqslant 1/||A^{-1}||$，则 $||(A-B)A^{-1}|| \leqslant 1$，由引理 *2.7.1* 可得 $BA^{-1} = I - (A-B)A^{-1}$ 可逆，进而 $B$ 可逆。这说明 $A$ 是内点，从而 $\mathcal{L}(X)$ 中可逆算子集是开集。

**题目 68.**(2.6.4) 在 $\ell^2$ 空间上，考察左推移算子：

$$A : (\xi_1, \xi_2, \cdots) \mapsto (\xi_2, \xi_3, \cdots)$$

求证：$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$，$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$，并且

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$$

**解答：** Show answer

记 $\mathbb{D} = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$，

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow& \exists 0 \neq x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \\ \Leftrightarrow& \lambda x_1 = x_2, \lambda x_2 = x_3, \cdots \\ \Leftrightarrow& x = \{\lambda^{n-1} x_1\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

$0 \neq x \in \ell^2$，所以 $|\lambda| < 1$，$\sigma_p(A) = \{\lambda : |\lambda| < 1\} = \mathbb{D}$.

$\lambda \in \partial\mathbb{D}$ 时：

$1^\circ$ $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq \ell^2$：

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A) \Rightarrow& \exists 0 \neq x \in \ell^2, y = (\lambda I - A)x = (\lambda x_1 - x_2, \lambda x_2 - x_3, \cdots) = \{\lambda x_n - x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} \\ \Rightarrow& \sum_{n=1}^{k} \lambda^{-n} y_n = x_1 - \lambda^{-k} x_{k+1} \to x_1 \text{ as } k \to \infty\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} y_n = x_1$$

但是取

$$y = \{\lambda^n \cdot \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$$

则级数发散，说明满足 $y = (\lambda I - A)x$ 的 $x$ 不存在。因此 $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq \ell^2$.

$2^\circ$ $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = \ell^2$：任取 $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$，取充分大的 $N$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon^2$$

令 $y_j = (x_1, x_2, \cdots, x_j, 0, \cdots)$，则

$$||y_N - x||^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow ||y_N - x|| < \varepsilon$$

因此只需证 $y_N \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$，令

$$z = \begin{cases} \sum_{k \leqslant n \leqslant N} \lambda^{-n+k-1} y_n & , k \leqslant N \\ 0 & , k > N \end{cases}$$

即有 $y_N = (\lambda I - A)z$.

因此 $\partial\mathbb{D} \subset \sigma_c(A)$.

接下来求 $\sigma(A)$，因为 $||Ax||^2 = ||x||^2 + |x_1|^2$，所以 $||Ax|| \leqslant ||x||$，等号在 $x_1 = 0$ 成立，因此

$$||A|| = \sup_{0 \neq x \in \ell^2} \frac{||Ax||}{||x||} = 1$$

所以 $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant 1\} = \overline{\mathbb{D}}$.

综上可知，$\overline{\mathbb{D}} \supset \sigma(A) \supset \sigma_c(A) \cup \sigma_p(A) \supset \partial\mathbb{D} \cup \mathbb{D} = \overline{\mathbb{D}}$，所以都相等。

**题目 69.**(3.1.2) $X$ 是 Banach 空间，$A \in \mathcal{L}(X)$ 满足：

$$||Ax|| \geqslant \alpha||x||, \ \forall x \in X$$

其中 $\alpha > 0$ 为常数，求证：$A \in \mathcal{T}(X)$，即 $A$ 是紧算子的充要条件是 $X$ 是有穷维的。

**解答：** Show answer

充分性：$X$ 有限维，所以有界集都列紧，$A$ 将有界集映为有界集，进而是列紧集，所以 $A$ 紧。

必要性：设 $B \subset X$ 为有界集，$A$ 紧，所以 $A(B)$ 有收敛列 $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\} \subset B$. 由于 $||x_n|| \leqslant \frac{1}{\alpha}||Ax_n||$，所以 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 也是收敛列，因此 $B$ 列紧。这说明 $X$ 上有界集都列紧，因此 $X$ 有限维。

**题目 70.**(3.1.4) $H$ 是 Hilbert 空间，$A : H \to H$ 是紧算子，又设 $x_n \xrightarrow{w} x_0, y_n \xrightarrow{w} y_0$，求证：

$$\langle x_n, Ay_n\rangle \to \langle x_0, Ay_0\rangle$$

**解答：** Show answer

注意到

$$|\langle x_n, Ay_n\rangle - \langle x_0, Ay_0\rangle| \leqslant |\langle x_n, Ay_n - Ay_0\rangle| + |\langle x_n, Ay_n - Ay_0\rangle|$$

因为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，所以 $\{x_n\}$ 是有界的，$A$ 紧 $\Rightarrow$ $A$ 全连续 $\Rightarrow$ $Ay_n \to Ay_0 \Rightarrow |(x_n, Ay_n - Ay_0)| \leqslant |x_n|\cdot|Ay_n - Ay_0| \to 0$；$\langle\cdot, Ay_0\rangle \in H^*$，所以由 $x_n$ 弱收敛可知 $\langle x_n - x_0, Ay_0\rangle \to 0$，所以 $|\langle x_n, Ay_n\rangle - \langle x_0, Ay_0\rangle| \to 0.$

**题目 71.**(3.1.6) 设 $\omega_n \in \mathbb{K}$，$\omega_n \to 0$，求证：

$$T : \ell^p \to \ell^p, \{\xi_n\} \mapsto \{\omega_n\xi_n\}$$

是 $\ell^p(p \geqslant 1)$ 上的紧算子。

**解答：** Show answer

$w_n$ 收敛则有界，从而 $T$ 有界。定义：

$$T_n : (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots) \mapsto (w_1x_1, \cdots, w_nx_n, 0, 0, \cdots)$$

那么 $T_n$ 都是有界有限秩算子，因此 $T_n$ 紧。对于 $\forall\varepsilon > 0$，存在充分大的 $N$ 使得 $\forall n > N$ 有 $|w_n| < \varepsilon$，从而

$$||T_nx - Tx|| \leqslant \varepsilon||x|| \Rightarrow ||T_n - T|| \leqslant \varepsilon$$

因此 $||T_n - T|| \to 0$，由于紧算子全体是闭集，$T$ 也是紧算子。

**题目 72.**(3.1.8) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个可测集，$K \in L^2(\Omega \times \Omega)$，求证：

$$A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), u(x) \mapsto \int_\Omega K(x, y)u(y)\mathrm{d}y$$

是 $L^2(\Omega)$ 上的紧算子。

**解答：** Show answer

由 C-S 不等式，$L^2(\Omega)$ 上范数记为 $||\cdot||$，

$$||Au||^2 = \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x, y)u(y)\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x, y)^2\mathrm{d}y \cdot ||u||^2\right) \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{||Au||^2}{||u||^2} \leqslant \int_{\Omega\times\Omega} K(x, y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x < +\infty$$

所以 $A$ 有界。

取 $L^2(\Omega)$ 上的可数正交基 $\{u_i\}$，[1] 设

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}K_i(y)u_i(x)$$

其中

$$K_i(y)=\int_\Omega K(x,y)u_i(x)$$

由 *Parseval*，

$$\int_\Omega |K(x,y)|^2\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}|K_i(y)|^2$$

因此

$$\int_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{\infty}\int_\Omega |K_i(y)|^2\mathrm{d}y$$

定义

$$A_n:u\mapsto\int_\Omega K_n(\cdot,y)f(y)\mathrm{d}y$$

其中

$$K_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}K_i(y)u_i(x)$$

那么 $A_N$ 是有界有限秩算子，因此紧。由 C-S 不等式，

$$\begin{aligned}||A-A_n||^2&\leqslant\int_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)-K_N(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\int_{\Omega\times\Omega}K(x,y)\sum_{i=1}^{n}K_i(y)u_i(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|K_i(y)|^2\mathrm{d}y\\&=\int_{\Omega\times\Omega}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega|K_i(y)|^2\mathrm{d}y\to 0\text{ as }n\to\infty\end{aligned}$$

因此 $A$ 是紧算子。

**题目 73.**(3.2.5) $A$ 是 $X$ 上的紧算子，$T=I-A$，求证：$\forall k\in\mathbb{N}$，$N(T^k)$ 是有穷维的，$R(T^k)$ 是闭的。

**解答：** Show answer

注意到 $T^k=(T-A)^k=I-A_k$，其中 $A_k$ 是 $A$ 的 $k$ 次多项式，因此 $A_k$ 是紧算子，由定理 3.2.2(*Riesz-Fredholm*) 前两条可知得证。

**题目 74.**(3.2.6) $X$ 是 Banach 空间，$M$ 是其闭线性子空间，若有界线性算子 $P:X\to M$ 满足 $P^2=P$，则称为由 $X$ 到 $M$ 上的投影算子，求证：

(1). 若 $M$ 是 $X$ 的有穷维线性子空间，则必存在由 $X$ 到 $M$ 上的投影算子；

(2). 若 $P$ 是由 $X$ 到 $M$ 上的投影算子，则 $I-P$ 是由 $X$ 到 $R(I-P)$ 上的投影算子；

(3). 若 $P$ 是由 $X$ 到 $M$ 上的投影算子，则 $X=M\oplus R(I-P)$.

(4). 若 $A$ 是 $X$ 上的紧算子，$T=I-A$，则在代数与拓扑同构意义下：

$$N(T)\oplus X/N(T)=X=R(T)\oplus X/R(T)$$

**解答：** Show answer

[1] 这里能取出 ONB 是因为 $L^2(\Omega)$ 是可分 Hilbert 空间。

(1). 取 $\{e_k\}_{k=1}^n$ 为 $M$ 的正交基，由习题 2.4.7 可知，存在 $f_1,\cdots,f_n \in X^*$ 使得

$$f_i(e_j)=\delta_{ij}$$

于是取

$$P: X \to M, x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)e_k$$

就是 $X$ 到 $M$ 的投影算子，因为 $P$ 有界且 $P^2=P$.

(2). 注意到 $(I-P)^2 = I-2P+P^2 = I-P$.

(3). 显然有 $X = M + R(I-P)$，因为

$$x = Px + (I-P)x$$

所以只需证明 $M\cap R(I-P)=0$，令 $x \in M\cap R(I-P)$，$y=(I-P)x$，因此

$$Px = P(I-P)y = (P-P)y = 0$$

又因为 $x\in M$，所以 $Px = x = 0$.

(4). $N(T)$ 有限维，由 (1) 知存在 $X$ 到 $N(T)$ 的投影算子 $P$，由 (3) 知 $X/N(T)$ 和 $R(I-P)$ 代数同构。现令

$$F: X/N(T) \to R(I-P), [x] \mapsto (I-P)x$$

不难验证 $F$ 良定、线性、双射。对于 $\forall [x] \in X/N(T)$，存在 $x' \in [x]$ s.t. $||x'|| \leqslant 2||[x]||$，于是

$$||F([x])|| = ||(I-P)x'|| \leqslant ||I-P||\cdot||x'|| \leqslant 2||I-P||\cdot||[x]||$$

因此 $F$ 有界 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ $F^{-1}$ 也连续 $\Rightarrow$ 拓扑同胚。

**题目 75.**(3.3.1) 给定数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，在空间 $\ell^1$ 上定义算子 $A$ 如下：

$$A(x_1,x_2,\cdots) = (a_1x_1, a_2x_2,\cdots)$$

求证：

(1). $A$ 有界的充要条件是 $M = \sup\limits_{n\geqslant 1}|a_n| < \infty$.

(2). $A^{-1}$ 有界的充要条件是 $\inf\limits_{n\geqslant 1}|a_n| > 0$.

(3). $A$ 是紧算子的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**解答：** Show answer

(1). 充分性：$||Ax|| \leqslant M||x|| \Rightarrow A \in \mathcal{L}(\ell^1)$；

必要性：假设 $\{a_n\}$ 无界，存在 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得 $|a_{n_k}| > k$，设 $e_n = (0,\cdots,0,\underset{m}{1},0,\cdots) \in \ell^1$，则

$$\frac{||Ae_{n_k}||}{||e_{n_k}||} = |a_{n_k}| > k \to \infty$$

这与 $A$ 有界矛盾。

(2). 如果 $\forall a_n \neq 0$，取

$$T:(x_1,x_2,\cdots) \mapsto (\frac{x_1}{a_1},\frac{x_1}{a_2},\cdots)$$

则 $TA = AT \Rightarrow T = A^{-1}$，而且

$$\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{1}{a_n}\right| < +\infty \Leftrightarrow \inf_{n\geqslant 1}|a_n| > 0$$

所以 $A^{-1}$ 有界 $\Leftrightarrow \inf\limits_{n\geqslant 1}|a_n| > 0$. 如果存在某个 $a_n = 0$，那么 $R(A) \subsetneqq \ell^1$，$A^{-1}$ 不存在。

(3). 充分性：设

$$A_n:(x_1,x_2,\cdots) \mapsto (a_1x_1,\cdots,a_nx_n,0,\cdots)$$

则 $A_n$ 是有界有限秩算子 $\Rightarrow A_n$ 紧，同时

$$||A - A_n|| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||x_k| \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

所以 $A$ 也是紧算子；

必要性：$A$ 是紧算子，由定理 3.2.3(Riesz-Schauder) 知 $0 \in \sigma(A)$ 且 0 之外的元素都是特征值，注意到 $Ae_n = a_n e_n \Rightarrow a_n \in \sigma(A)$，

$$\forall a \in \sigma(A) \backslash \{0, a_1, a_2, \cdots\} \Rightarrow \inf_{n \geqslant 1} |\lambda - \lambda_n| > 0$$

由 (2) 知 $T = (\lambda I - A)^{-1}$ 有界 $\Rightarrow \lambda \in \rho(A)$，所以 $\sigma(A) = \{0, a_1, a_2, \cdots\}$，且一定有

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

**题目 76.**(3.3.2) 在 $C[0,1]$ 中，考虑映射

$$T : C[0,1] \to C[0,1], x(t) \mapsto \int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

(1). 证明 $T$ 是紧算子；

(2). 求 $\sigma(T)$ 和 $T$ 的一个非平凡闭不变子空间。

**解答：** Show answer

(1). 对于任何有界集 $B$，我们来证明 $T(B)$ 一致有界且等度连续，从而列紧。设 $\forall x \in B, ||x|| < M$，则

$$||Tx|| \leqslant \int_0^1 |x(s)|\mathrm{d}s \leqslant \sup t \in [0,1]|x(t)| = ||x|| < M$$

所以一致有界；

$$|(Tx)(s') - (Tx)(s'')| = |\int_{s'}^{s''} x(s)\mathrm{d}s| \leqslant ||x|| \cdot |s'' - s'|$$

所以等度连续。

(2). 因为 $C[0,1]$ 是无穷维的，由定理 3.2.3(Riesz-Schauder) 可得 $0 \in \sigma(T)$，$T$ 紧 $\Rightarrow \sigma(T)$ 除了 0 之外都是特征值。如果 $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$，则

$$Tx = \lambda x \Rightarrow \int_0^t x(s)\mathrm{d}s = \lambda x(t)$$

有非零解，进而 $x(t) \in C^1[0,1]$，两边求导得

$$x(t) = \lambda x'(t) \Rightarrow x(t) = C\mathrm{e}^{\frac{t}{\lambda}}$$

但

$$\int_0^t x(s)\mathrm{d}s = C(\lambda \mathrm{e}^{\frac{t}{\lambda}} - 1) = C\lambda \mathrm{e}^{\frac{t}{\lambda}} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = 0$$

所以 $\sigma(T) = \{0\}$. $C^1[0,1]$ 是 $T$ 的一个闭不变子空间。

## 4.4 期末复习相关

### 4.4.1 部分往年期末题

**题目 77.**(19.6) 定义

$$T : \ell^2 \to \ell^2, (x_1, x_2, \cdots) \mapsto (x_2, \frac{x_3}{2}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{n}, \cdots)$$

求 $T$ 的谱和特征值：$\sigma(T), \sigma_p(T)$.

**解答**：Show answer

首先显然 $||T||\leqslant 1$，取 $||Te_2||=||e_2||=1$ 可知 $||T||=1$，因此 $\sigma(T)\leqslant\overline{B(0,1)}$，设

$$T_n:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,\frac{x_2}{x_3},\cdots,\frac{x_{n+1}}{n},0,0,\cdots)$$

$T_n\to T$ 可知 $T$ 是紧算子，因此 $0\in\sigma(T)$.

对于 $\lambda\neq 0$，考虑 $\lambda I-T$，若存在 $x$ 使得 $(\lambda I-T)x=0$，那么

$$\lambda x_n=\frac{x_{n+1}}{n+1}\Rightarrow x_{n+1}=x_1\cdot\frac{(n+1)!}{\lambda^n}$$

如果 $x_1\neq 0$，$|x_{n+1}|\to\infty$，所以只能 $x=0$，所以 $\lambda I-T$ 是单射，由二择一律知是满射，所以 $\lambda\in\rho(T)$，因此 $\sigma(T)=\{0\}$.

因为 $Te_1=0$，所以 $\sigma_p(T)=\{0\}$.

**题目 78.**(20.7) 定义：

$$T:\ell^2\to\ell^2,(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,\lambda_1x_1,\lambda_2x_2,\cdots)$$

其中 $0\neq\lambda_n\in\mathbb{C}$ 且 $\lambda_n\to 0$，求 $\sigma_p,\sigma_c,\sigma_r$.

**解答**：Show answer

类似可证 $T$ 是紧算子，以及 $\lambda\neq 0$ 时 $\lambda I-T$ 是单射：

$$(\lambda I-T)x=0\Rightarrow\lambda x_{n+1}-\lambda_nx_n=0,x_1=0\Rightarrow x=0$$

进而是满射，所以只需考虑 0：$Tx=0\Rightarrow x=0$，不是特征值；$Tx$ 的第一个分量始终是 0，所以 $\mathrm{Ran}(T)$ 的闭包肯定不是全空间，所以 $0\notin\sigma_c(T)$.

综上，$\sigma_p(T)=\sigma_c(T)=\varnothing$，$\sigma_r(T)=\{0\}$.

**题目 79.**(22.6) 定义：

$$T:L^2[0,1]\to L^2[0,1],x(t)\mapsto\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$$

(1). 证明 $T$ 是紧算子。

(2). 证明：

$$T^nx(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}x(s)\mathrm{d}s$$

(3). 求 $T$ 的谱半径。

(4). 求 $T$ 的各种谱。

(5). 判断 $T$ 是否是对称算子。

**解答**：Show answer

*(1).* 任取 $L^2[0,1]$ 上的有界集 $F$，不妨

$$\sup_{f\in F}||f||^2=\sup_{f\in F}\int_0^1|f(t)|^2\mathrm{d}t<M$$

由于积分的绝对连续性，$T(F) \subset C[0,1]$，故只需证明 $T(F)$ 一致有界且等度连续，对于 $\forall f \in L^2[0,1]$，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(|f(s)| - \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}s &= \int_0^1 \left(|f(s)|^2 - 2|f(s)| \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \left(\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2\right) \mathrm{d}s \\
&= ||f||^2 - 2\left(\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \\
&= ||f||^2 - \left(\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
||T(f)||^2 = \int_0^1 \left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(s)|\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 ||f||^2 \mathrm{d}t = ||f||^2 < M
$$

故一致有界。对于 $\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta < \varepsilon$，则 $||f_1 - f_2|| < \delta \Rightarrow$

$$
||T(f_1) - T(f_2)|| = ||T(f_1 - f_2)|| \leqslant ||f_1 - f_2|| < \varepsilon
$$

所以等度连续。

(2). 这个用归纳证明，具体过程和泛函没啥关系，就不写了。

(3). 用上一问结论和谱半径公式求出谱半径为 0，计算过程省略。

(4). 由上一问结论 $\sigma(T) = \{0\}$，只需判断 0 是什么谱：$T(f) = 0 \Rightarrow f = 0$，所以 0 不是特征值，现只需考虑 $\mathrm{Ran}(-T)$，显然多项式 $P[0,1] \subset \mathrm{Ran}(-T)$，因为 $\overline{P[0,1]} = L^2[0,1]$，所以 0 是连续谱。

(5). 假如是对称算子，因为 $L^2$ 是 Hilbert 空间，则

$$
\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle
$$

从而

$$
\int_0^1 y(t) \int_0^t x(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t) \int_0^t y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t
$$

取 $x = 1, y = t^2$，则等式不成立，故不是对称算子。

**题目 80.**(19.7) 证明一个 Hilbert 空间是有限维的当且仅当它的任意一组规范正交基都是它的线性基。

**解答：** Show answer

回顾一下概念：规范正交基是指：

$$
x = \sum_{\alpha \in \Lambda} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha
$$

线性基（*Hamel* 基）：任何一个向量可以写成有限个基中向量的线性组合。

充分性是显然的，必要性：假设是无穷维的，取它的一族规范正交基 $\{e_\alpha\}$，从中选出可数个 $\{e_k\} = A$，定义

$$
x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k
$$

那么 $\{x_n\}$ 是柯西列，不妨设 $x_n \to a$，$a$ 是有限个 $e_\alpha$ 的有限线性组合，设

$$
a = \sum_{i=1}^p a_i e_{k_i} + c
$$

$c$ 是不在 $A$ 中的基的有限线性组合，设 $b = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} k_i$，则 $\forall n > b$，都有

$$
||x_n - a|| = \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{k=b+1}^n e_k + \left(\sum_{k=1}^b \frac{e_k}{n} - \sum_{i=1}^p a_i e_{k_i}\right) - c\right|\right| > \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{k=b+1}^n e_k\right|\right| = 1 - \frac{b}{n} > \frac{1}{b+1}
$$

这就与 $x_n \to a$ 矛盾。

**题目 81.**(18.6) $X$ 是赋范空间，证明：$\forall x \in X$，

$$||x|| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, ||f|| = 1\}$$

**解答：** Show answer

$x = 0$ 时等式显然成立，下设 $x \neq 0$. 对于 $\forall f \in X^*$ with $||f|| = 1$，

$$1 = ||f|| \geqslant \frac{|f(x)|}{||x||} \Rightarrow ||x|| \geqslant |f(x)| \Rightarrow ||x|| \geqslant \sup\{|f(x)| : f \in X^*, ||f|| = 1\}$$

另一方面，由 $HBT$ 可知存在 $f \in X^*$ with$||f|| = 1$ 使得 $f(x) = ||x||$，所以

$$\sup\{|f(x)| : f \in X^*, ||f|| = 1\} \geqslant ||x||$$

故相等。

**题目 82.**(18.7) $X$ 是 Banach 空间，$A, B$ 分别是 $X$ 上的有界算子、紧算子，证明：

$$\sigma(A)\backslash(\sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B)) = \sigma(A+B)\backslash(\sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B))$$

**解答：** Show answer

对两边取补集，就是

$$\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B) = \rho(A+B) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B)$$

对于 $\lambda \in \rho(A)$，$\lambda I - A$ 可逆，考虑

$$\lambda I - (A+B) = (\lambda I - A)(I - (\lambda I - A)^{-1}B)$$

注意 $C = (\lambda I - A)^{-1}B$ 是有界算子和紧算子的复合，仍然是紧算子，所以 $I - C$ 单当且仅当 $I - C$ 满，注意 $(\lambda I - A)$ 是双射，所以 $\lambda I - (A+B)$ 单当且仅当 $\lambda I - (A+B)$ 满：

1. $\lambda I - (A+B)$ 单 $\Rightarrow \lambda \in \rho(A+B)$.
2. $\lambda I - (A+B)$ 不单 $\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A+B)$.

所以

$$\rho(A) \subset \rho(A+B) \cup \sigma_p(A+B)$$

所以

$$\rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B) \subset \rho(A+B) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_p(A+B)$$

另一方面，注意到题设等式是关于 $A, A+B$ 对称的，所以另一个方向也成立。(可以理解为两个有界算子 $C, D$ 满足 $C - D$ 紧。)

**题目 83.**(18.9) $X$ 是 Banach 空间，$T$ 是 $X$ 上的线性算子，证明：$T$ 有界当且仅当

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx$$

**解答：** Show answer

充分性：只需证明 $T$ 是闭算子，若 $x_n \to x, Tx_n \to y$，则由于收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛，

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} Tx, Tx_n \xrightarrow{w} y$$

由弱收敛列极限唯一[2]，可得 $y = Tx$.

[2]如果 $x_n \xrightarrow{w} x, x_n \xrightarrow{w} y$，则根据 $\mathbb{K}$ 上收敛极限的唯一性，$\forall f$ 有 $f(x) = f(y)$，再由 HBT 可知 $x = y$.

必要性：$T$ 有界，$\forall f\in X^*$，$f\circ T\in X^*$，从而

$$x_n\xrightarrow{w}x\Rightarrow f(Tx_n)\to f(Tx),\ \forall f\in X^*\Rightarrow Tx_n\xrightarrow{w}Tx$$

这个题好像不需要 *Banach* 的条件。

**题目 84.** (18.10) 设 $X$ 是 Banach 空间，$f$ 是 $X$ 上的非零线性泛函，证明 $N(f)$ 要么是 $X$ 的闭子空间，要么是 $X$ 的稠密真子空间。

这道题其实就是习题 2.1.7 的思路继续延伸了一点。

**解答**：Show answer

$f$ 有界 $\Leftrightarrow N(f)$ 是 $X$ 的闭子空间；若 $f$ 无界，对于任意 $n$，存在 $x_n$ 使得

$$|f(x_n)|>n||x_n||$$

取

$$a_n=\frac{f(x_n)}{f(x)}\Rightarrow f(x_n-a_nx)=0\Rightarrow x_n-a_nx\in N(f)$$

所以

$$x-\frac{x_n}{a_n}=x-\frac{f(x)x_n}{f(x_n)}\in N(f)$$

那么令 $n\to\infty$，

$$\left|\left|\frac{f(x)x_n}{f(x_n)}\right|\right|=\frac{|f(x)|\cdot||x_n||}{|f(x_n)|}<\frac{|f(x)|}{n}\to 0$$

所以

$$N(f)\ni x-\frac{f(x)x_n}{f(x_n)}\to x$$

**题目 85.** (19.4) 证明弱 * 收敛序列一定有界。

**解答**：Show answer

共鸣定理直接得证。

**题目 86.**(19.5) $H$ 是 Hilbert 空间，$P$ 是 $H$ 上的有界算子，且 $P^2=P=P^*$，证明 $P$ 的值域是闭集，且 $P$ 是正交投影算子。

**解答**：Show answer

任取 $\mathrm{Ran}(P)$ 中柯西列 $P(x_i)$，不妨设 $P(x_i)\to a$，则 $P^2(x_i)\to P(a)=a\Rightarrow a\in\mathrm{Ran}(P)\Rightarrow\mathrm{Ran}(P)$ 闭。

对 $H$ 作正交分解 $H=\mathrm{Ran}(P)+\mathrm{Ran}(P)^{\perp}=\mathrm{Ran}(P)+M$，对于 $\forall x\in H$，可以分解为

$$x=y+z,\ y\in\mathrm{Ran}(P),z\perp\mathrm{Ran}(P)$$

那么

$$\langle P(y),P(z)\rangle=\langle P^2(y),z\rangle=\langle P(y),z\rangle=0$$

同理

$$\langle P(x),P(z)\rangle=\langle P(x),z\rangle=0$$

所以

$$\langle P(x),P(z)\rangle-\langle P(y),P(z)\rangle=\langle P(z),P(z)\rangle=0\Rightarrow P(z)=0$$

由于 $y \in \mathrm{Ran}(P)$，所以 $P(y) = y$，从而 $P(x) = P(y) = y$，因此 $P$ 是 $X$ 到 $\mathrm{Ran}(P)$ 的正交投影算子，

**题目 87.**(19.8) $X, Y$ 是 Banach 空间，$X$ 有限维，$T$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的线性算子，证明存在 $x \in X, ||x|| = 1$ 使得 $||Tx|| = ||T||$.

**解答：** Show answer

*$T$ 是有界算子（命题 2.1.1），则 $\forall n$，存在 $x_n$ with $||x_n|| = 1$ 满足*

$$||T|| - \frac{1}{n} \leqslant ||Tx_n|| \leqslant ||T||$$

*有限维赋范空间单位球面列紧，所以 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，不妨设 $x_{n_k} \to x$，则 $||Tx|| = ||T||$.*

**题目 88.**(19.9) $X, Y$ 是赋范空间，且 $X \neq 0$，证明 $Y$ 是 Banach 空间当且仅当 $L(X, Y)$ 是 Banach 空间。

**解答：** Show answer

*必要性在定理 2.1.3，只说明充分性：设 $\{y_n\}$ 是 $Y$ 中柯西列，取 $0 \neq x \in X$，由 HBT 可知存在 $f \in X^*$ with $||f|| = 1, f(x) = ||x||$，定义算子序列：*

$$F_n : X \to Y, x \mapsto f(x)y_n$$

*则 $F_n$ 是线性算子，且 $||F_n|| = ||y_n||$，所以*

$$||F_n(x) - F_m(x)|| \leqslant ||x|| \cdot ||y_n - y_m||$$

*故 $\{F_n\}$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 上的柯西列，不妨 $F_n \to F$，取 $y = \frac{F(a)}{|a|}$，*

$$||y_n - y|| = \left|\left|\frac{F_n(x)}{|f(x)|} - \frac{F(x)}{|x|}\right|\right| = \frac{1}{|x|}||F_n(x) - F(x)|| \leqslant ||F_n - F|| \to 0$$

*从而 $y_n \to y$，这就证明了 $Y$ 是 Banach 空间。*

**题目 89.**(20.3) $X$ 是赋范空间，$V$ 是 $X$ 的子空间，证明 $V$ 在 $X$ 中稠密等价于 $V^\perp = 0$，这里

$$V^\perp = \{f \in X^* : f(V) = 0\}$$

**解答：** Show answer

*必要性由 $f \in X^*$ 的连续性可得；充分性由定理 2.7.4 可得。*

**题目 90.**(20.5) $X$ 是 Banach 空间，$V_n$ 是一列闭子空间，满足

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

证明：存在某个 $n_0$ 使得

$$V_{n_0} = X$$

**解答：** Show answer

*由 BCT1，$X$ 不是可数个无处稠密集之并，所以存在某个 $V_{n_0}$ 不是无处稠密集，即有 $\overline{V} = V$ 内点，但真闭子空间无内点，所以只能 $V_{n_0} = X$.*

**题目 91.**(20.6) $X$ 是 Hilbert 空间，$||x_n|| \to ||x||$ 且 $x_n \xrightarrow{w} x$，则 $x_n \to x$.

**解答：** Show answer

考虑

$$\langle \cdot, x\rangle \in H^* \Rightarrow \langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = ||x||^2$$

那么

$$||x_n - x||^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = ||x_n||^2 + ||x||^2 - 2\langle x_n, x\rangle \to ||x||^2 + ||x||^2 - 2||x||^2 = 0 \text{ as } n \to \infty$$

**题目 92.**(20.8) $A_n$ 是 Hilbert 空间 $X$ 上的一列有界线性算子，且对于 $\forall x$ 都有 $||A_n x|| \to 0$，证明：对于任意紧算子 $K$ 都有 $||A_n K|| \to 0$.

**解答：** Show answer

记单位球面为 $S$，考虑

$$||A_n K|| = \sup_{x\in S} ||A_n K(x)|| = \sup_{y\in K(S)} ||A_n y||$$

假设 $||A_n K|| \nrightarrow 0$，即存在 $\delta > 0$ 使得

$$\forall n,\ \sup_{y\in K(S)} ||A_n y|| > \delta$$

所以

$$\forall n, \exists y_n = K(x_n) \in K(S) \text{ s.t. } ||A_n y_n|| \geqslant \delta$$

$K$ 是紧算子，$\{x_n\} \in S$ 有界，所以 $K(\{x_n\}) = \{y_n\}$ 列紧，取其收敛子列 $y_{n_k} \to y$，则

$$||A_{n_k} y_{n_k}|| \leqslant ||A_{n_k} y|| + ||A_{n_k}(y_{n_k} - y)|| \leqslant ||A_{n_k} y|| + ||A_{n_k}|| \cdot ||y_{n_k} - y|| \to 0 \text{ as } k \to \infty$$

这与 $||A_{n_k} y_{n_k}|| \geqslant \delta$ 矛盾。

**解答：** Show answer

另一种解法：

**题目 93.**(21.5) $X$ 是可分赋范空间，证明：存在 $\{f_n\} \in X^*$ 使得对于任意 $x \in X$，都有

$$||x|| = \sup_n |f_n(x)|$$

**解答：** Show answer

设 $X$ 的稠密可数子集是 $x_{n}{}_{n=1}^{\infty}$，有 *HBT* 可得存在 $f_n \in X^*$ with $||f_n|| = 1$ s.t. $f(x_n) = ||x_n||$，一方面：

$$\sup_n |f_n(x)| \leqslant \sup_n ||f_n|| \cdot ||x|| = ||x||$$

另一方面，设 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \to x$，那么

$$f_{n_k}(x_{n_k}) = ||x_{n_k}|| \to ||x|| \text{ as } k \to \infty$$

所以

$$\sup_n |f_n(x)| \geqslant ||x||$$

**题目 94.**(21.7) 设 $X, Y$ 是实 Hilbert 空间，$S_x$ 是 $X$ 中单位球面，$T \in L(X, Y)$，且不存在 $x \in S_x$ 使得 $||Tx|| = ||T||$，求证：存在 $\{x_n\} \subset S_x$，使得 $x_n \xrightarrow{w} 0$ 且 $||Tx_n|| \to ||T||$

**解答：** Show answer

由于

$$||T|| = \sup_{x \in S_x} ||Tx||$$

所以

$$\forall n, \exists x_n \in S_x \text{ s.t. } ||T|| - \frac{1}{n} \leqslant ||Tx_n|| < ||T||$$

则 $||Tx_n|| \to ||T||$. 由 Eberlein Smulian 定理：自反空间上的有界集有弱收敛子列，所以不妨假设 $x_n \xrightarrow{w} x$，只需证明 $x = 0$.

假设 $x \neq 0$，$||x_n|| = 1$，所以

$$||x_n - x||^2 = 1 + ||x||^2 - 2\langle x_n, x\rangle \to 1 - ||x||^2$$

又因为 $T$ 有界，所以在 $Y$ 上有 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$，同理有

$$||Tx_n - Tx||^2 \to ||T||^2 - ||Tx||^2$$

同时

$$||Tx_n - Tx||^2 \leqslant ||T||^2 \cdot ||x_n - x||^2$$

所以上式左右两边取极限得

$$||T||^2 - ||Tx||^2 \leqslant ||T||^2(1 - ||x||^2) \Rightarrow ||T|| \cdot ||x|| \leqslant ||Tx||$$

从而

$$||T|| \leqslant \frac{||Tx||}{||x||} = \left|\left|T\left(\frac{x}{||x||}\right)\right|\right| < ||T||$$

矛盾，所以 $x = 0$.

**题目 95.**(22.3) 证明二则一律。

**解答：** Show answer

在定理 3.2.2，但是为什么会考这个呢...

### 4.4.2 其它

**题目 96.** $C[0,1]$ 上有两个范数 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$，其中

$$||f||_1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$||\cdot||_2$ 则满足：当 $||x_n - x||_2 \to 0$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) \to x(t),\ \forall t \in [0,1]$$

而且 $(C[0,1], ||\cdot||_2)$ 完备，证明两个范数等价。

**解答：** Show answer

取范数

$$||\cdot||_3 = ||\cdot||_1 + ||\cdot||_2$$

则 $||\cdot||_3$ 强于 $||\cdot||_1$ 和 $||\cdot||_2$，只需证明 $||\cdot||_3$ 是 $C[0,1]$ 上的完备范数，则由范数等价定理可知三个范数都等价。

**题目 97.** $0<p<1$ 时，$L^p(\mathbb{R})$ 上不存在有界线性泛函。

**解答：** Show answer

设 $f:L^p(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 有界，$||f||=M$，考虑拆分区间 $[a,b]$:

$$[a,b]=\bigcup_{k=1}^{n}[a,a+\frac{k}{n}(b-a)]:=\bigcup_{k=1}^{n}I_k$$

那么

$$||f(\chi_{[a,b]})||=\left|\left|\sum_{k=1}^{n}f(\chi_{I_k})\right|\right|\leqslant M\cdot\sum_{k=1}^{n}||\chi_{I_i}||=Mn\left(\frac{b-a}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以

$$\frac{||f(\chi_{[a,b]})||}{||\chi_{[a,b]}||}=Mn^{1-\frac{1}{p}}\to 0\Rightarrow f=0$$

**题目 98.** $X$ 是 Banach 空间，$T:X\to X^*$ 满足 $\mathrm{Dom}(T)=X$，$T(x)(x)\geqslant 0,\forall x$，证明 $T$ 有界。

**解答：** Show answer

定义域全空间，求证有界，证明 $T$ 是闭算子即可。假设 $x_n\to 0, Tx_n\to L$，那么对于 $\forall\lambda>0$，

$$T(x_n+\lambda y)(x_n+\lambda y)=\lambda^2T(y)T(y)+\lambda T(x_n)(y)+\lambda T(y)(x_n)+T(x_n)(x_n)\geqslant 0$$

令 $n\to\infty$ 得到

$$\lambda^2T(y)(y)+\lambda L(y)\geqslant 0\Rightarrow\lambda T(y)(y)+L(y)\geqslant 0,\forall\lambda>0,y$$

则一定有 $L(y)\geqslant 0$，否则取一个充分小的 $\lambda$ 就不成立了。同理取 $T(x_n-\lambda y)(x_n-\lambda y)$ 就得到 $L(-y)\geqslant 0$，从而 $L=0$.

然后考虑一般情况：$x_n\to x, Tx_n\to L$，那么 $x_n-x\to 0\Rightarrow Tx_n-Tx\to L-Tx=0$，从而 $L=Tx$，因此 $T$ 是闭算子，由闭图像定理知 $T$ 有界（则连续）。

**题目 99.** $M$ 是 $L^2[0,1]$ 的闭子空间，且 $M\subset C[0,1]$，证明 $\dim M<+\infty$.

**解答：** Show answer

$(M,||\cdot||_\infty)$ 和 $(M,||\cdot||_2)$ 都是完备的，考虑

$$\frac{||x||_2}{||x||_\infty}=\frac{\left(\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}{\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|}\leqslant 1$$

所以两个范数等价，进而存在 $C$ 使得

$$||x||_\infty\leqslant C||x||_2,\forall x\in M$$

由于 $L^2$ 是 *Hilbert* 空间，其闭子空间也是 *Hilbert* 空间，对于固定的 $t\in[0,1]$:

$$l_t:M\to\mathbb{R},x\mapsto x(t)$$

那么由 *Riesz* 表示定理，存在 $q_t\in L^2[0,1]$ 使得 $l_t=\langle\cdot,q_t\rangle,||q_t||_2=||l_t||$,

$$\frac{|l_t(x)|}{||x||_2}=\frac{|x(t)|}{||x||_2}\leqslant\frac{||x||_\infty}{||x||_2}\leqslant C\Rightarrow||q_t||_2=||l_t||\leqslant C$$

$M$ 可分[3]，所以有可数正交基 $S=\{h_n\}$，

$$C^2 \geqslant ||q_t||_2^2 = \sum |\langle h_n, q_t\rangle|^2 = \sum |h_n(t)|^2$$

于是

$$\#S = \sum 1 = \sum ||h_n||_2^2 = \sum \int_0^1 |h_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 C^2 \mathrm{d}t = C^2 < +\infty$$

**题目 100.** 设

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^1[a,b] \to C[a,b], f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

证明它是闭算子而非有界算子，说明闭图像定理为何不适用。

**解答：** Show answer

取

$$f_n(t) = \frac{(t-a)^n}{(b-a)^n}$$

则

$$||f_n|| = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)| = 1$$

但

$$\left|\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_n\right|\right| = \sup_{t\in[a,b]} \left|n\frac{(t-a)^{n-1}}{(b-a)^n}\right| = \frac{n}{b-a} \to \infty \text{ as } n \to \infty$$

所以是无界算子。

考虑 $x_n \in C^1[a,b]$，且 $x_n \to x$，$Tx_n \to y$，我们转化成数分的语言就是：函数列 $x_n(t)$ 一致收敛，每一项 $x_n$ 都有连续导数，且 $x_n'$ 一致收敛到 $y$，那么根据一致收敛函数列的性质，$x$ 也有连续导数，且 $x'=y$，即 $x \in C^1[a,b]$，$Tx=y$，这就证明了 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是闭算子。

闭图像定理不适用的原因是 $C^1[a,b]$ 不是闭集，比如一阶可微函数可以一致收敛到折线，后者不是一阶可微的。例如 $[a,b]=[-1,1]$，

$$f_n(t) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

$f_n$ 一致收敛于 $f(t)=|t|$，在 $t=0$ 处不可导。具体过程就不详细写了，都是数分的东西。

**题目 101.** 证明 $\ell^\infty$ 不可分，$C_0$ 可分（考虑全体趋于 0 的有理数列即可）。

**解答：** Show answer

假设 $\ell^\infty$ 存在可数稠密子集 $D$，那么对于 $\forall x \in \ell^\infty$，$\forall \varepsilon > 0$，存在 $y \in D$ 使得 $||x-y|| < \varepsilon$. 现在考虑

$$S = \{x = \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n = 0 \text{ or } x_n = 1\} \subset \ell^\infty$$

即全体由 $0,1$ 构成的数列，集合 $S$ 和 $[0,1]$ 是等势的（全体二进制小数），所以不可数，我们现在希望建立一个 $S$ 到 $D$ 的单射，从而 $D$ 不可数，得到矛盾。

取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，任取 $s=\{s_n\} \in S$，则存在某个 $d=\{d_n\} \in D$ 使得

$$\forall n, |s_n - d_n| < \frac{1}{2}$$

现在改动 $s_1$：若 $s_1 = 0$，则取 $s_1' = 1$，

$$|0-d_1| < \frac{1}{2} \Rightarrow d_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow |1-d_1| > \frac{1}{2}$$

[3] $L^p$ 空间可分，而 Banach 空间可分，则其闭子空间也是可分的。

若 $s_1=1$，则取 $s_1'=0$，

$$|1-d_1|<\frac{1}{2}\Rightarrow d_1\in(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\Rightarrow|d_1|>\frac{1}{2}$$

这说明 $s_1'$ 一定使得 $|s_1'-d_1|>\frac{1}{2}$，对于 $s'=(s_1',s_2,s_3,\cdots)\in S$，我们需要重新找一个 $d'\in D$ 使得 $||s'-d'||<\frac{1}{2}$. 也就是说，对于某个 $d\in D$，最多只有一个 $s\in S$ 和它的距离小于 $\frac{1}{2}$. 这就得到了从 $S\to D$ 的单射。

**解答**：Show answer

我们还可以用更“泛函”的方式回答这个问题：定理 *2.8.16* 告诉我们，如果 $\ell^\infty$ 可分，则 $(\ell^\infty)^*$ 中有界集都弱 * 列紧，类似于习题 *2.5.2*，可以证明 $(\ell^\infty)^*=C_0$，即每个 $(\ell^\infty)^*$ 中的算子，都能被表示成与某个 $f\in C_0$ 作内积（此处指各分量相乘后求和）。若我们能给出 $C_0$ 上有界但不弱 * 列紧的例子，就能得出矛盾。例如 $f_n=(0,0,\cdots,0,\underset{n}{1},0,0,\cdots)\in C_0$，$e=(1,1,\cdots)\in\ell^\infty$，$\{f_n\}$ 是有界集，但是

$$f_n(e)=1\nrightarrow 0$$

这说明 $\{f_n\}$ 不弱 * 列紧。

**题目 102.** $(X,d)$ 是度量空间，若 $A\subset X$ 不可数且 $(A,d)$ 是离散空间，则 $(X,d)$ 不可分。

**解答**：Show answer

这道题思路和上一题中证明存在 $S\to D$ 的单射如出一辙，可以发现上一题构造的集合 $S$ 就是一个离散空间。

假设 $X$ 存在可数稠密子集 $G$，我们考虑建立 $A\to G$ 的单射，从而证明 $G$ 不可数，导出矛盾。对于 $\forall a\in A$，$\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在某个 $g\in G$ 满足

$$d(g,a)<\frac{1}{2}$$

而 $\forall a'\in A,a\neq a',d(a,a')=1$，所以

$$d(g,a')\geqslant|d(a,a')-d(g,a)|=|1-d(g,a)|>\frac{1}{2}$$

这说明我们需要重新找一个 $g'\in G$ 使得 $d(g',a')<\frac{1}{2}$，这就构造了 $S\to G$ 的单射。